2023

INDUKSI MATEMATIKA

Ramdani Miftah

Program Studi Pendidikan Matematika
UIN Syarif Hidayatullah Jakarta

Induksi Matematika

- Induksi matematika merupakan suatu teknik yang dikembangkan untuk membuktikan pernyataan.
- Induksi matematika merupakan proses pembuktian teori umum/rumus dari kasus-kasus khusus (yang mengandung bilangan asli).
- Induksi matematika digunakan untuk mengecek hasil proses yang terjadi secara berulang sesuai dengan pola tertentu.
- Indukasi matematika digunakan untuk membuktikan *universal statements* $\forall\ n \in A, P(n)$ dengan $A \subset N$ dan N adalah himpunan bilangan positif atau himpunan bilangan asli. $P(n)$ adalah fungsi proposisi.

By Ramdani Miftah

Induksi Matematika

Tahapan Induksi Matematika

Misalkan P(n) adalah fungsi proposisi yang mengandung unsur bilangan asli n. maka langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika sebagai berikut:

1). *Basis Step* : Tunjukkan rumus untuk n = 1 sehingga P(1) Benar (disesuaikan)

2). *Inductive Step* : Buat rumus untuk n = k sehingga P(k) diasumsikan Benar

Tunjukkan bahwa P(k) $\rightarrow$ P(k+1) Benar

3). *Conclusion* : P(n) adalah benar untuk setiap n bilangan Asli

By Ramdani Miftah

Induksi Matematika

Bentuk soal induksi matematika :

1. **Pembuktian Bentuk Deret/Sigma**

Bentuk Deret

Buktikan rumus P(n) : 1 + 3 + 5 + … + (2n – 1) = n^2, ∀ n ∈ **N**

Bentuk Sigma

Buktikan rumus P(n) : $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i(i+1))} = \frac{n}{n+1}$, ∀ n ∈ **N**

2. **Pembuktian Bentuk Kelipatan**

a. Buktikan rumus P(n) : $n^2(n+1)^2$ habis dibagi 4 (kelipatan 4), ∀ n ∈ **N**

b. Untuk setiap bilangan asli n, buktikan bahwa: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

By Ramdani Miftah

Buktikan rumus P(n) : 1 + 3 + 5 + … + (2n – 1) = n^2, ∀ n ∈ **N**

Jawab:

1) Basis step

n = 1, diperoleh P (1) : 1 = 1^2 = 1 ∴ Benar

2) *Inductive Step*

n = k, diperoleh P(k) : 1 + 3 + 5 + ⋯ + (2 k − 1) = k^2 ∴ Asumsi Benar

n = k + 1. Akan ditunjukkan bahwa P(k) benar → P(k+1) juga benar.

Tunjukkan bahwa P(k+1) : 1 + 3 + 5 + ⋯ + (2 k − 1) + (2 k + 1) = $(k+1)^2$

Bukti:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)}_{P(k)} + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

3) Conclusion

Berdasarkan Langkah 1) dan 2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa

P(n) : 1 + 3 + 5 + … + (2n – 1) = n^2 untuk ∀ n ∈ **N**

By Ramdani Miftah

Buktikan rumus P(n) : $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i(i+1))} = \frac{n}{n+1}$, $\forall$ n $\in$ **N**

Jawab:

1) Basis step

n = 1, diperoleh P (1) : $\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ∴ Benar

2) *Inductive Step*

n = k, diperoleh P(k) : $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(i(i+1))} = \frac{k}{k+1}$ ∴ Asumsi Benar

n = k + 1. Akan ditunjukkan bahwa P(k) benar → P(k+1) juga benar.

Tunjukkan bahwa P(k+1) : $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(i(i+1))} = \frac{k+1}{k+2}$

Bukti:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(i(i+1))} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(i(i+1))}}_{\text{P(k)}} + \sum_{i=k+1}^{k+1} \frac{1}{(i(i+1))} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

3) Conclusion

Berdasarkan Langkah 1) dan 2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa P(n) : $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i(i+1))} = \frac{n}{n+1}$ untuk $\forall$ n $\in$ **N**

By Ramdani Miftah

Buktikan rumus P(n) : $n^2(n+1)^2$ habis dibagi 4 (kelipatan 4), ∀ n ∈ **N**
Jawab:

1) Basis step

n = 1, diperoleh P (1) : $1^2(1+1)^2 = 4$ habis dibagi 4 ∴ Benar

2) *Inductive Step*

n = k, diperoleh P(k) : $k^2(k+1)^2$ habis dibagi 4 ∴ Asumsi Benar

n = k + 1. Akan ditunjukkan bahwa P(k) benar → P(k+1) juga benar.

Tunjukkan bahwa P(k+1) : $(k+1)^2(k+2)^2$ habis dibagi 4

Bukti:

$$(k+1)^2(k+2)^2 = (k+1)^2(k^2+4k+4) = k^2(k+1)^2 + (4k+4)(k+1)^2 = \underbrace{k^2(k+1)^2}_{\text{P(k)}} + \underbrace{4(k+1)(k+1)^2}_{\text{Habis dibagi 4}}$$

3) *Conclusion*

Berdasarkan Langkah 1) dan 2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa $n^2(n+1)^2$ habis dibagi 4 untuk ∀ n ∈ **N**

By Ramdani Miftah

Untuk setiap bilangan asli n, buktikan bahwa: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \le 2 - \frac{1}{n}$

Jawab:

(1) Basis step

Untuk n = 1, diperoleh $p(1): 1 \le 2 - \frac{1}{1} = 1$ ∴ Benar

(2) Inductive Step

n = k diperoleh $p(k)$: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{k}$ ∴ Asumsi Benar

Tunjukkan bahwa P(k+1) juga bernilai benar dengan:

$$p(k+1):\ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \le 2 - \frac{1}{k+1}$$

Perhatikan bahwa:

$$k(k+1) \le (k+1)(k+1)$$

$$\frac{1}{k(k+1)} \ge \frac{1}{(k+1)(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Tunjukkan bahwa :

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \le 2 - \frac{1}{k+1}$$

Bukti:

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \le 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)}$$

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \le 2 - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}} - \frac{1}{k+1}$$

atau dikembalikan sebagai

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \le 2 - \frac{1}{k+1}$$

Diperoleh $p(k+1)$ bernilai benar

3) Conclusion

Berdasarkan Langkah 1) dan 2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa untuk setiap bilangan asli n, buktikan bahwa: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \le 2 - \frac{1}{n}$

By Ramdani Miftah

Induksi Matematika

Latihan

1. Buktikan rumus P(n) : $\sum_{i=1}^{n} 2^{1-i} = 2 - 2^{(1-n)}$, ∀ n ∈ **N**
2. Buktikan rumus P(n) : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ ... + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$, ∀ n ∈ **N**
3. Buktikan rumus P(n) : $n.(n^2 + 2)$ habis dibagi 3, ∀ n ∈ **N**
4. Buktikan rumus P(n) : $10^4 + 3.4^{(n+2)} + 5$ habis dibagi 9, ∀ n ∈ **N**
5. Untuk semua $n \geq 1$, buktikan bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 (SAMA Dengan No.3)
6. Untuk semua bilangan bulat tidak negative *n*, buktikan bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
7. Buktikan bahwa $3^n < n!$ Untuk n bilangan bulat positif yang lebih besar dari 6

By Ramdani Miftah