

2022

HIMPUNAN

Ramdani Miftah

**Program Studi Pendidikan Matematika
UIN Syarif Hidayatullah Jakarta**

Konsep Himpunan

- Himpunan adalah suatu kumpulan atau koleksi dari objek-objek yang terdefinisi dengan jelas (*well defined*)
- Terdefinisi dengan jelas artinya bahwa himpunan tersebut memiliki sifat-sifat dan syarat tertentu sebagai ciri pembeda yang menentukan keanggotaan suatu himpunan
- Objek yang terdapat dalam himpunan disebut *elemen*, *unsur* atau *anggota*.



Georg Cantor
1845-1918

Nama lengkapnya **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor**. Lahir di St Petersburg, Russia 3 Maret 1845 dan meninggal di Halle Jerman 6 Januari 1918. Dia dianggap sebagai bapak teori himpunan karena dialah yang mengembangkan pertamakali cabang matematika ini. Demikian pula ide-idenya mengenai himpunan terutama mengenai himpunan tak hingga.

Konsep Himpunan

- Apakah kalimat-kalimat berikut termasuk himpunan?
 1. Kumpulan mahasiswa pintar
 2. Kumpulan bilangan prima
- Himpunan disimbolkan dengan huruf kapital, seperti A, B, C dan elemen-elemen dari himpunan disimbolkan dengan huruf alfabet kecil seperti a, b, c. notasi $a \in A$ dibaca "a ialah elemen/anggota dari A". dan " $a \notin A$ " dibaca "a bukan elemen/anggota dari A".
- Himpunan mungkin saja beranggotakan himpunan lagi. Himpunan seperti ini biasanya disebut koleksi dari himpunan-himpunan

Konsep Himpunan

Empat cara penyajian himpunan :

1. Enumerasi

Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci

Contoh 1.

- Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
- $C = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$
- $R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$
- $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$
- $K = \{\{\}\}$
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, \dots, 100\}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Konsep Himpunan

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A

Contoh 2

1) Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$, $K = \{\{\}\}$

maka : $3 \in A$, $\{a, b, c\} \in R$, $\{c\} \notin R$, $\{\} \in K$

2) Misalkan $P_1 = \{a, b\}$, $P_2 = \{\{a, b\}\}$, $P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$

Maka : $a \in P_1$, $a \notin P_1$, $P_1 \in P_2$, $P_1 \notin P_3$, $P_2 \in P_3$

Konsep Himpunan

2. Simbol-simbol Baku

P = himpunan bilangan bulat positif = $\{ 1, 2, 3, \dots \}$

N = himpunan bilangan alami (natural) = $\{ 1, 2, \dots \}$

Z = himpunan bilangan bulat = $\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan **U**.

Contoh: Misalkan $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan **A** adalah himpunan bagian dari **U**, dengan $A = \{1, 3, 5\}$

Konsep Himpunan

3. Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi : $\{ x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi } x \}$

Contoh

1). A adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 5

$$A = \{ x \mid x \text{ bilangan bulat positif lebih kecil dari } 5 \}$$

$$\text{atau } A = \{ x \mid x \in \mathbf{P}, x < 5 \}$$

$$\text{atau ekuivalen dengan } A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

2). B adalah himpunan bilangan genap positif yang lebih besar atau sama dengan 2 dan lebih kecil atau sama dengan 8,

$$B = \{ x \mid x \text{ himpunan bilangan genap positif yang lebih besar atau sama dengan 2 dan lebih kecil atau sama dengan 8} \}$$

$$\text{atau } B = \{ x \mid x \in \mathbf{P}, 2 \leq x \leq 8 \}$$

$$\text{atau ekuivalen dengan } B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

3). Q adalah himpunan bilangan rasional.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Konsep Himpunan

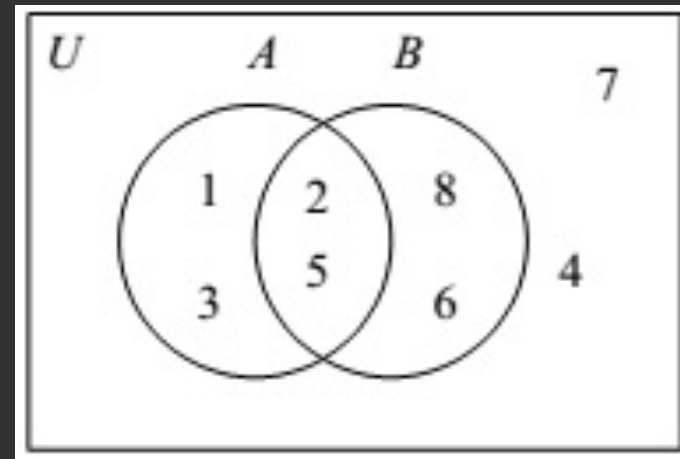
4). $\mathbf{Z}$ = himpunan semua bilangan bulat maka G himpunan bilangan bulat yang ganjil, dapat ditulis :

$$G = \{ 2n + 1 \mid n \in \mathbf{Z} \}$$

4. Diagram Venn

Contoh

Misalkan $U = \{1, 2, \dots, 7, 8\}$,
 $A = \{1, 2, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 5, 6, 8\}$.



Kardinalitas

- Jumlah elemen berbeda di dalam A disebut **kardinal** dari himpunan A .
- Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh

- (i) $B = \{x \mid x \text{ merupakan bilangan prima lebih kecil dari } 20\}$, atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$
- (ii) $T = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$, maka $|T| = 5$
- (iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, maka $|A| = 3$
- (iv) $E = \{x \mid x \text{ bilangan bulat positif kurang dari } 1\}$, maka $|E| = 0$

Himpunan Kosong (*null set*)

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : $\emptyset$ atau $\{ \}$

Contoh

- 1) $A = \{x | x^2 = 9, x \in \text{bilangan genap}\}$ atau $D = \emptyset$ karena $n(A) = 0$
 - 2)
 - (i) $E = \{x \mid x < x\}$, maka $n(E) = 0$
 - (ii) $P = \{\text{orang Indonesia yang pernah ke bulan}\}$, maka $n(P) = 0$
 - (iii) $A = \{x \mid x \text{ adalah akar persamaan kuadrat } x^2 + 1 = 0\}$, $n(A) = 0$
- himpunan $\{\{ \}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset\}$
 - himpunan $\{\{ \}, \{\{ \}\}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 - $\{\emptyset\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu $\emptyset$

Himpunan Bagian (*Subset*)

- Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B (jika $\forall x \in A$ ada di B).
- Notasi: $A \subseteq B$
Notasi : Subset ($A \subseteq B$). Superset ($B \supseteq A$).
- $\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\emptyset$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A .
- Subset/superset jika dan hanya jika $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- Proper subset ($A \subset B$). Proper Superset ($B \supset A$)
- Proper Subset / Proper superset jika dan hanya jika $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \exists y(y \in B \wedge y \notin A)$
- Himpunan kosong ($\emptyset$) merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan.

Himpunan Bagian (*Subset*)

$A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

(i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B .

Contoh: $\{1\}$ dan $\{2, 3\}$ adalah *proper subset* dari $\{1, 2, 3\}$

(ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

Himpunan Bagian (*Subset*)

Himpunan bagian jika digambarkan dengan diagram venn

Contoh :

1) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

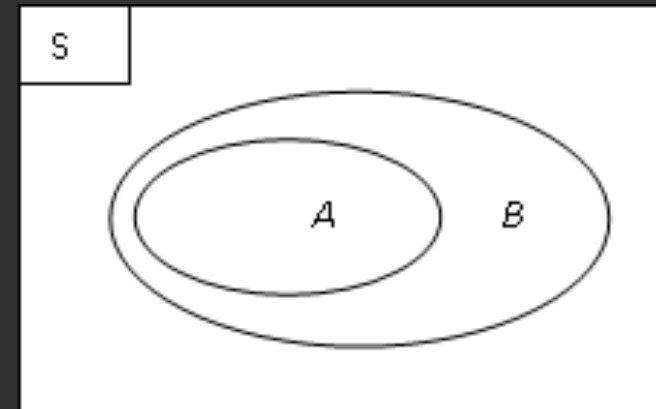
3) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

4) Jika

$A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq 0, y \geq 0 \}$ dan
 $B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0 \text{ dan } y \geq 0 \},$

maka ... ?

$\therefore B \subset A$



Himpunan Bagian (Subset)

- 5) Diberikan himpunan $A = \{2x | x \in A\}$ dan $B = \{x | x \text{ bilangan asli genap}\}$. Karena semua anggota himpunan A sama dengan anggota himpunan B maka A subset dari B atau ditulis $A \subseteq B$.
- 6) Diberikan himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{a, b, c\}$. Karena semua anggota himpunan B juga merupakan anggota himpunan A maka B subset sejati dari A atau ditulis $B \subset A$.
- 7) Diberikan himpunan $A = \{a, b, c\}$. Buatlah himpunan bagian yang mungkin dari himpunan A tersebut! Jawab : $\{ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

Himpunan Bagian (*Subset*)

TEOREMA

Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

- (a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).
- (b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\emptyset \subseteq A$).
- (c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A .
- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A . Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
- Notasi : $A = B \rightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Himpunan yang Sama

Contoh

- (i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x(x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$
- (ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{ 5, 3, 8 \}$, maka $A = B$
- (iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{ 3, 8 \}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A , B , dan C berlaku aksioma berikut:

- (a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
- (b) jika $A = B$, maka $B = A$
- (c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekuivalen

- Himpunan A dikatakan ekuivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.
- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh

Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$,

Maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Lepas (*Disjoint*)

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.
- Notasi : $A \supset \subset B$ atau $A // B$.

Contoh :

$$A = \{2x | x \in A\}$$

$$B = \{x | x \in \text{bilangan asli yang ganjil}\}$$

$$\text{Maka : } A // B$$

Himpunan Tak Lepas (*Joint*)

- Dua himpunan A dan B dikatakan tak lepas jika ada elemen di himpunan A merupakan elemen di himpunan B .
- Notasi : $A \nparallel B$

Contoh :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$$

Maka $A \nparallel B$

Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A , termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.
- Notasi : $P(A)$ atau 2^A . Jika $|A|=m$, maka $|P(A)| = 2^m$

Contoh :

Diberikan himpunan $A = \{a, b, c\}$.

Maka himpunan kuasa dari himpunan A adalah

$P(A) = \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

$|P(A)| = 2^3 = 8$

Berapa banyak himpunan bagian jika himpunan = $\{a, b, c, d\}$?

Contoh :

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

himpunan kuasa dari himpunan $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Diagram Garis

Diagram garis merupakan diagram yang menyatakan suatu himpunan yang merupakan himpunan bagian dari himpunan lainnya. Jika terdapat $A \subset B$ berarti himpunan B berada pada kedudukan yang lebih tinggi dari himpunan A , maka digambarkan sebagai berikut:



Contoh : Buatlah diagram garis pada himpunan-himpunan berikut!

$S = \{x|x \in B\}, A = \{2x|x \in A\}, C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$B = \{x|x \in \text{bilangan asli yang genap}\}, D = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$

Operasi Terhadap Himpunan

Jenis operasi yang lazim digunakan terhadap himpunan adalah

1. Operasi gabungan (*union*),
2. Irisan (*intersection*),
3. Komplemen (*complement*),
4. Selisih (*difference*),
5. Beda stangkup (*symmetric difference*)
6. Perkalian kartesian (*cartesian product*).

Operasi Terhadap Himpunan

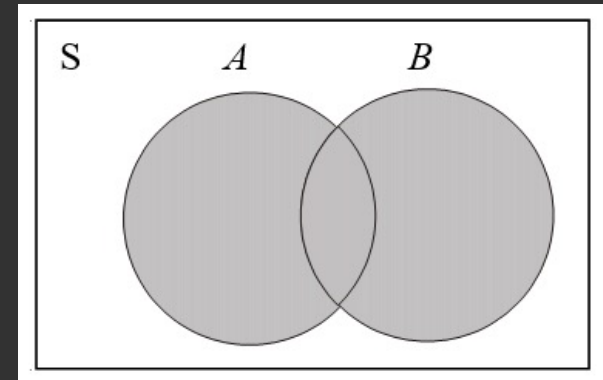
1. Gabungan (Union)

- Gabungan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau himpunan B .
- Notasi : $A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$

Contoh : Jika $A = \{2, 5, 8\}$ dan $B = \{7, 5, 22\}$ maka $A \cup B = \{2, 5, 7, 8, 22\}$

Catatan :

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \subset (A \cup B); B \subset (A \cup B)$
- Bila $A \subset B$ maka $A \cup B = B$
- $A \cup \emptyset = A, A \cup S = S$



Operasi Terhadap Himpunan

2. Irisan (*intersection*)

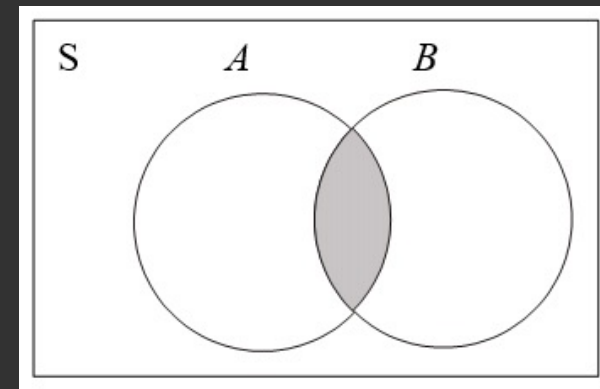
- Irisan dari himpunan A dan B adalah sebuah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan A dan himpunan B .
- Notasi : $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$

Contoh :

- Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$ maka $A \cap B = \{4, 10\}$
- Jika $A = \{3, 5, 9\}$ dan $B = \{4, 10\}$ maka $A \cap B = \{\}$

Catatan :

- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \subset A$; $(A \cap B) \subset B$
- Bila $A \subset B$ maka $A \cap B = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap S = A$



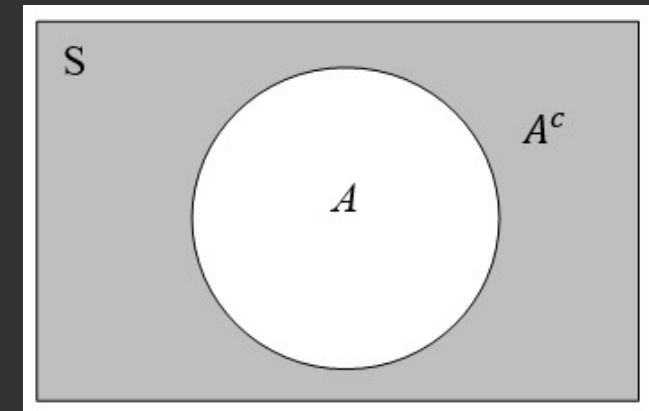
Operasi Terhadap Himpunan

3. Komplemen (*complement*)

- Komplemen dari suatu himpunan A terhadap suatu himpunan semesta S adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen S yang bukan elemen A .
- Notasi : $A^c = \{x | x \in S \text{ dan } x \notin A\}$
- Contoh : Misalkan $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Jika $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ maka $A^c = \{2, 4, 6, 8\}$

Catatan :

- $A \cap A^c = \emptyset$
- $A \cup A^c = S$
- $S^c = \emptyset, \emptyset^c = S$
- $(A^c)^c = A$
- $A - B^c = A \cap B$ (A dan B tidak saling lepas)
- Bila $A \subset B$ maka $A^c \subset B$



Operasi Terhadap Himpunan

4. Selisih (*difference*)

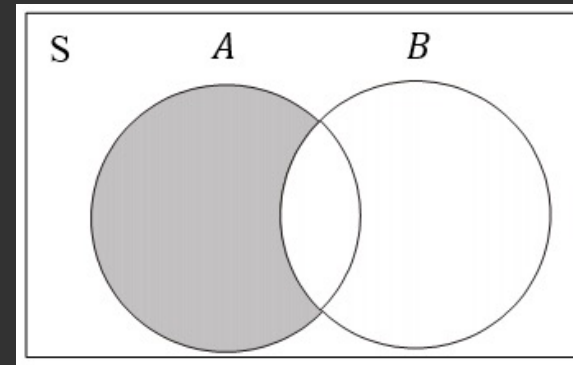
- Selisih dari dua himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen dari A tetapi bukan elemen dari B .
- Notasi : $A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\}$

Contoh :

- Misalkan $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ maka $A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$
- $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

Catatan :

- $(A - B) \subset A$
- $A - B \neq B - A$, bila $A \neq B$
- Bila $A \subset B$ maka $A - B = \emptyset$ dan $(B - A) \subset B$



Operasi Terhadap Himpunan

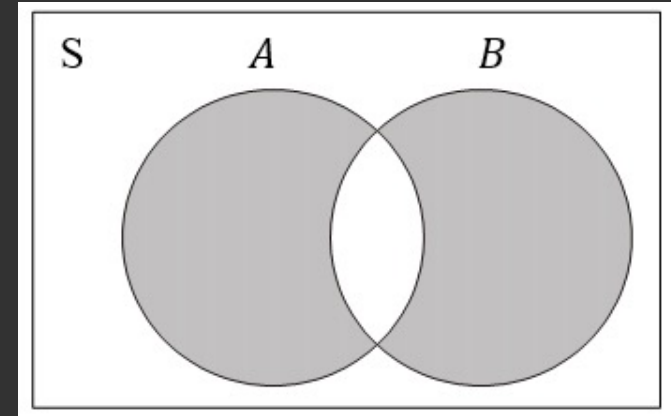
5. Beda Stangkup (*symmetric difference*)

- Beda setangkup dari himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya ada pada himpunan A atau B , tetapi tidak pada keduanya.
- Notasi : $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Contoh : Jika $A = \{2, 4, 6\}$ dan $B = \{2, 3, 5\}$ maka $A \oplus B = \{3, 4, 5, 6\}$

Catatan :

- $A \oplus B = B \oplus A$
- $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$



Operasi Terhadap Himpunan

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Perkalian kartesian dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan berurutan yang dibentuk dari komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B . Notasi : $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh :

- Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$
- maka $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$
- $B \times A = \dots ?$

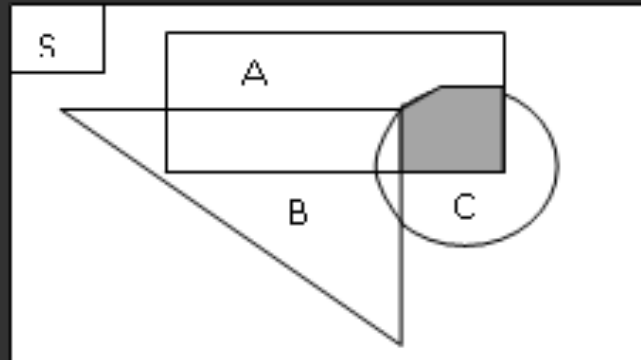
Catatan :

- Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka : $|A \times B| = |A||B|$
- Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a) dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$
- Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.
- Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$, maka $A \times B = B \times A = \emptyset$

Latihan

1. Jika diketahui $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 6\}$, $C = \{4, 6\}$ dan $D = \{4, 6, 8\}$. Tunjukkan himpunan yang merupakan subset dari himpunan lainnya, dan buatlah diagram garisnya!
2. Benar atau salahkah pernyataan-pernyataan berikut ini! Jika salah betulkanlah!
 - a. Jika $A \subset B$ dan $B \subset C$, maka $A \subset C$
 - b. Jika $a \in A$ dan $A \in B$ maka $a \subset B$
3. Gambarkanlah diagram venn untuk 3 himpunan A , B , C yang tidak hampa sedemikian hingga:
 - a. $A \subset B, C \subset B, A \cap C = \phi$
 - b. $A \subset B, C \not\subset B, A \cap C \neq \phi$
 - c. $A \subset C, A \neq C, B \cap C = \phi$
 - d. $A \subset (B \cap C), B \subset C, C \neq B, A \neq C$

4. Nyatakan operasi himpunan pada daerah yang diarsir



5. Pada himpunan semesta $S = \{x^2 | x^2 < 50, x \in \text{bilangan bulat}\}$ terdapat himpunan $A = \{x | x < 30\}$, $B = \{x | x \text{ adalah bilangan ganjil}\}$ dan $C = \{x | x \text{ adalah kelipatan 4}\}$. Tentukan elemen-elemen himpunan dan buatlah diagram Venn dari operasi-operasi himpunan berikut :

- a. $B \cup A$
- b. $A^c \cup C$
- c. $(A \cap C)^c$
- d. $A - C^c$
- e. $B^c - C^c$
- f. $A \oplus B$
- g. $(A \oplus B^c)^c$
- h. $A \oplus A^c$