2022

PEMBUKTIAN KALIMAT HIMPUNAN

Ramdani Miftah

Program Studi Pendidikan Matematika
UIN Syarif Hidayatullah Jakarta

Hukum Aljabar Himpunan

1. **Identitas**
   a. $A \cup \emptyset = A$
   b. $A \cap S = A$
2. **Idempoten**
   a. $A \cup A = A$
   b. $A \cap A = A$
3. **Komutatif**
   a. $A \cup B = B \cup A$
   b. $A \cap B = B \cap A$
4. **Asosiatif**
   a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5. **Distributif**
   a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. **Penyerapan (absorpsi)**
   a. $A \cup (A \cap B) = A$
   b. $A \cap (A \cup B) = A$
7. **Involusi**

$$(A^c)^c = A$$

8. **Hukum dominasi**
   a. $A \cap \emptyset = \emptyset$
   b. $A \cup S = S$
9. **Komplemen**
   a. $A \cup A^c = S$
   b. $A \cap A^c = \emptyset$
   c. $S^c = \emptyset$
   d. $\emptyset^c = S$
10. **Dalil De Morgan**
   a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

By Ramdani Miftah

Pembuktian Kalimat Himpunan

1. Pembuktian dengan Menggunakan Definisi

- Untuk membuktikan kesamaan himpunan, misalnya $A = B$ maka harus dibuktikan dengan dua arah sesuai dengan definisinya, yaitu : $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Contoh 1 :

Buktikan Dalil De Morgan berikut $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Bukti!

Pertama, akan ditunjukkan bahwa $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$

- Ambil sebarang $x \in (A \cup B)^c$
- $x \in (A \cup B)^c \rightarrow x \notin (A \cup B)$
- Artinya $x \notin A$ dan $x \notin B$
- Jadi $x \in A^c$ dan $x \in B^c$, berarti $x \in A^c \cap B^c$
- Dapat ditunjukkan bahwa $x \in (A \cup B)^c \rightarrow x \in A^c \cap B^c$
- Maka: $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$

Pembuktian Kalimat Himpunan

Kedua, akan ditunjukkan bahwa $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$

- Ambil sebarang $x \in A^c \cap B^c$
- $x \in A^c \cap B^c \ \rightarrow \ x \in A^c$ dan $x \in B^c$
- Karena itu $x \notin A$ dan $x \notin B$, yang berarti $x \notin (A \cup B)$
- Jadi $x \in (A \cup B)^c$
- Dapat ditunjukkan bahwa $x \in A^c \cap B^c \rightarrow x \in (A \cup B)^c$
- Maka: $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$

Dari pembuktian di atas diperoleh bahwa $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ dan $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$ sehingga dapat disimpulkan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *(terbukti).*

By Ramdani Miftah

Pembuktian Kalimat Himpunan

Contoh 2 :

Misalkan A dan B himpunan. Buktikan jika $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subset (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$.

Penyelesaian :

(a). Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika $x \in P$ maka $x \in Q$. Misalkan $x \in A$ karena $A \subset (B \cup C)$ maka dengan definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup C)$. Dari definisi operasi gabungan, $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.

(b). Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \emptyset$ maka $x \notin B$

Dari (a) dan (b), $x \in C$ haruslah benar. Karena $\forall x \in A$ juga berlaku $x \in C$ maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$. *(terbukti)*

Pembuktian Kalimat Himpunan

2. Pembuktian Dengan Menggunakan Aljabar Himpunan

Contoh 1 :

Buktikan hukum penyerapan berikut :

a. $A \cup (A \cap B) = A$

b. $A \cap (A \cup B) = A$

Bukti!

a.	$A \cup (A \cap B) = (A \cap S) \cup (A \cap B)$	Hukum identitas
	$= A \cap (S \cup B)$	Hukum distributif
	$= A \cap S$	Hukum dominasi
	$= A$	Hukum identitas
b.	$A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B)$	Hukum identitas
	$= A \cup (\emptyset \cap B)$	Hukum distributif
	$= A \cup \emptyset$	Hukum dominasi
	$= A$	Hukum identitas

By Ramdani Miftah

Pembuktian Kalimat Himpunan

Contoh 2 :

jika A dan B masing-masing adalah himpunan, buktikan bahwa $(A \oplus B) \cap A = A \cap B^c$.

Bukti!

$(A \oplus B) \cap A$	$= [(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] \cap A$	Definisi operasi beda stangkup
	$= [(A \cap B^c) \cap A] \cup [(B \cap A^c) \cap A]$	Hk. Distributif
	$= [(A \cap A) \cap B^c)] \cup [(A \cap A^c) \cap B]$	Hk. Asosiatif
	$= (A \cap B^c) \cup [(A \cap A^c) \cap B]$	Hk. Idempoten
	$= (A \cap B^c) \cup (\emptyset \cap B)$	Hk. Komplemen
	$= (A \cap B^c) \cup \emptyset$	Hk. Dominasi
	$= A \cap B^c$	*Hk*. Identitas

By Ramdani Miftah

Pembuktian Kalimat Himpunan

3. Pembuktian Dengan Menggunakan Tabel Keanggotaan

- Analogi : 1 = Benar dan 0 = Salah.

Contoh :

Buktikan Dalil De Morgan berikut $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

A	B	A^c	B^c	$(A \cup B)$	$(A \cup B)^c$	$A^c \cap B^c$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

sama

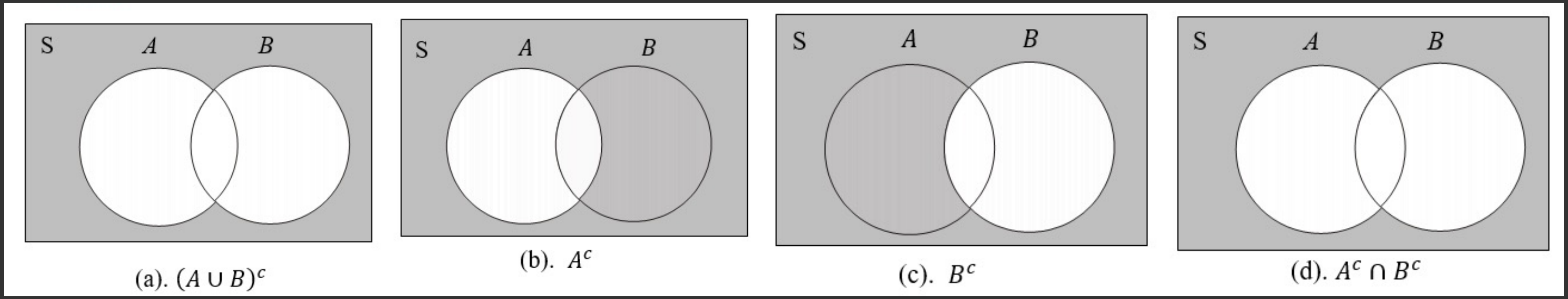
By Ramdani Miftah

Pembuktian Kalimat Himpunan

4. Pembuktian Dengan Menggunakan Diagram Venn

Contoh :

Buktikan Dalil De Morgan berikut $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



Implementasi Himpunan

Beberapa sifat yang berkaitan dengan banyaknya anggota himpunan, sebagai berikut:

1. $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, syarat $A \cap B = \emptyset$
2. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, syarat $A \cap B \neq \emptyset$
3. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$, syarat $A \cap B \cap C \neq \emptyset$
4. $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \oplus B) = n(A - B^c)$
5. $n(A \oplus B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$
6. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A \cap B^c)$
7. $n(S) = n(A) + n(A^c)$
8. $n(S) = n(A \cup B) + n(A \cup B)^c = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cup B)^c$

By Ramdani Miftah

Latihan

1. Tentukan apakah pernyataan berikut ini benar atau salah

a. $A \cap 2^A = 2^A$

b. $\{A\} \cup 2^A = 2^A$

c. $A - 2^A = A$

d. $\{A\} \in 2^A$

e. $A \subseteq 2^A$

2. Jika *A* dan *B* masing-masing adalah himpunan, tunjukkan secara aljabar bahwa $(A \oplus B) \cap A$ dapat dinyatakan dengan $A - B$.

3. Misalkan n(A) banyaknya anggota himpunan A. jika n (A – B) = 3x + 60, $n(A \cap B) = x^2$, $n(B - A) = 5x$ dan $n(A \cup B) = 300$. Maka tentukan n (A)

By Ramdani Miftah

4. Dari 120 orang mahasiswa semester 7 di UIN Jakarta, 100 orang mengambil paling sedikit satu mata kuliah pilihan, yaitu Sejarah Matematika, Matematika Islam, dan Teori Grup. Diketahui 65 orang mengambil Sejarah Matematika, 45 orang mengambil Matematika Islam, 42 orang mengambil Teori Grup. Kemudian diketahui 20 orang mengambil Sejarah Matematika dan Matematika Islam, 25 orang mengambil Matematika Islam dan Teori Grup, dan 15 orang mengambil Sejarah Matematika dan Teori Grup. a. Tentukan banyaknya mahasiswa yang mengambil ketiga mata kuliah tersebut. b. Tentukan banyaknya mahasiswa yang hanya mengambil mata kuliah Sejarah Matematika C. Tentukan banyaknya mahasiswa yang hanya mengambil mata kuliah Matematika Islam. d. Tentukan banyaknya mahasiswa yang hanya mengambil mata kuliah Teori Grup e. Gambarkan diagram Venn, f. Banyaknya mahasiswa yang tidak mengambil satu pun dari 3 mata kuliah tersebut
5. Di sebuah kelas dilakukan pengambilan data. Dari data tersebut diperoleh,13 siswa menyukai Matematika, 12 siswa menyukai Fisika, 8 siswa menyukai Kimia. Jumlah siswa yang hanya menyukai Kimia yaitu sama dengan setengah dari jumlah siswa yang menyukai Fisika dan sama dengan jumlah siswa yang hanya menyukai Fisika. Selalu ada siswa yang menyukai dua mata pelajaran sekaligus dari mata pelajaran yang ada tersebut. Berapakah jumlah siswa di kelas tersebut jika tidak ada siswa yang menyukai ketiga mata pelajaran sekaligus?

By Ramdani Miftah