

2022

RELASI

Ramdani Miftah

**Program Studi Pendidikan Matematika
UIN Syarif Hidayatullah Jakarta**

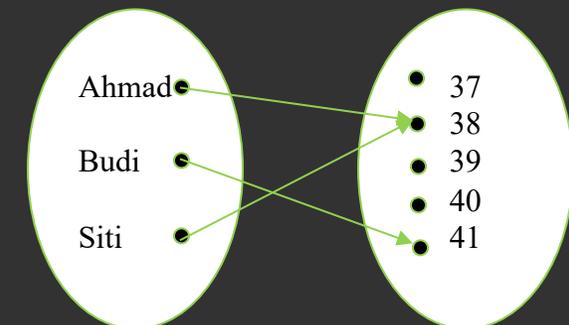
Relasi (R)

Untuk mendefinisikan relasi R diperlukan 3 (tiga) hal, yaitu :

1. Suatu himpunan A
2. Suatu himpunan B
3. Suatu aturan atau kalimat matematika terbuka

Misalnya :

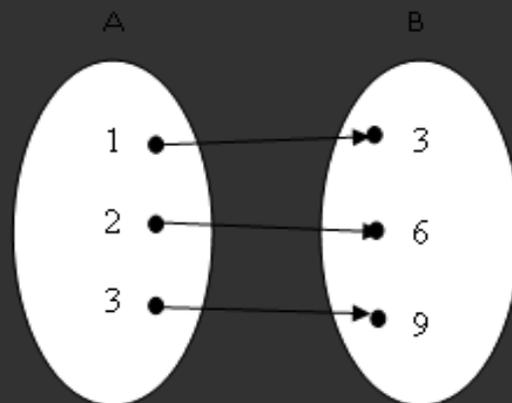
- Himpunan tiga orang mahasiswa: $A = \{\text{Ahmad, Budi, Siti}\}$
- Himpunan nomor sepatu: $B = \{37, 38, 39, 40, 41\}$
- Diketahui bahwa Ahmad memakai sepatu nomor 38, Budi memakai sepatu nomor 41, Siti memakai sepatu nomor 38
- $R = \{(\text{Ahmad}, 38), (\text{Budi}, 41), (\text{Siti}, 38)\}$



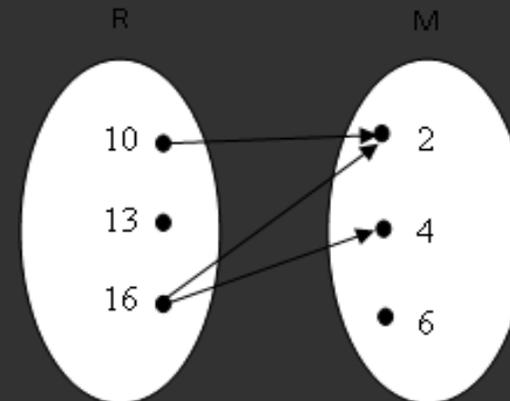
Definisi 1:

“Relasi R dengan suatu kalimat terbuka dari himpunan A ke himpunan B adalah sebuah himpunan yang anggota-anggotanya semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$ sedemikian sehingga kalimat terbukanya menjadi bernilai benar”.

1. Diketahui himpunan $A = \{x \mid 0 < x \leq 10, x \in \text{bilangan genap}\}$ dan $B = \{x \mid 0 < x \leq 6, x \in \text{bilangan prima}\}$. R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B dengan aturan “kelipatan dari”. Tentukan himpunan pasangan terurut dari R .
2. Tentukan aturan relasi yang mungkin!



Gambar 1



Gambar 2

Definisi 2:

“Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu himpunan bagian dari $A \times B$ atau dapat ditulis $R \subset A \times B$, dengan $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$ ”

Contoh:

1. Diketahui $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Tentukan banyaknya unsur dalam himpunan $R = \{(x, y) | (x, y) \in A \times B \wedge x < y\}$
2. Tentukan Domain dan Range!
 - a. $SQ = \{(b, c) : b \in \mathbb{Z} \wedge c \in \mathbb{Z} \wedge b = c^2\}$
 - b. $R = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4, x, y \in \text{bilangan real}\}$

Relasi Invers (R^{-1})

- Relasi R dari himpunan A ke himpunan B yang didefinisikan

$$R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

maka relasi invers R^{-1} dari himpunan B ke himpunan A didefinisikan

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Contoh:

1. Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika didefinisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q . Tentukan R^{-1}
2. Jika R pada $SQ = \{(b, c) : b \in \mathbb{Z} \wedge c \in \mathbb{Z} \wedge b = c^2\}$. Tentukan R^{-1}

Komposisi Relasi

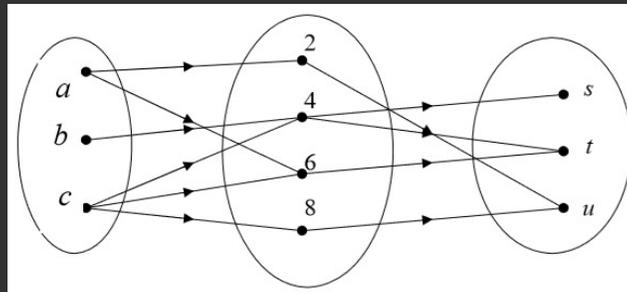
Definisi :

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B , dan S adalah relasi himpunan B ke himpunan C . komposisi R dan S dinotasikan dengan $S \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh $S \circ R = \{(a, c) | a \in A, c \in C, \text{ dan untuk beberapa } b \in B, (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S\}$

Contoh:

Misalkan, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $C = \{s, t, u\}$. Relasi dari A ke B didefinisikan oleh : $R = \{(a, 2), (a, 6), (b, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)\}$ Sedangkan relasi dari himpunan B ke himpunan C didefinisikan oleh : $T = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$.

Tentukan $T \circ R$!



Misalkan R merupakan relasi dari himpunan A, maka akan terdapat **sifat-sifat relasi** sebagai berikut :

No	SYARAT	FORMAT
1	Sifat Refleksif $\forall a \in A$ berlaku $a R a$	$a \in A \rightarrow (a, a) \in R$
2	Sifat Irrefleksif $\forall a \in A$ berlaku $\sim(a R a)$	$a \in A \rightarrow (a, a) \notin R$
3	Sifat Simetri $a, b \in A$ berlaku $(a R b) \Leftrightarrow (b R a)$	$((a, b) \in R \wedge (a = b)) \rightarrow (b, a) \in R$ $((a, b) \in R \wedge (a \neq b)) \rightarrow (b, a) \in R$
4	Sifat Antisimetri $a, b \in A$ berlaku $((a R b) \wedge (a = b)) \rightarrow (b R a)$ $((a R b) \wedge (a \neq b)) \rightarrow \sim(b R a)$	$((a, b) \in R \wedge (a = b)) \rightarrow (b, a) \in R$ $((a, b) \in R \wedge (a \neq b)) \rightarrow (b, a) \notin R$
5	Sifat Asimetri $a, b \in A$ berlaku $(a R b) \Rightarrow \sim(b R a)$	$((a, b) \in R \wedge (a = b)) \rightarrow (b, a) \notin R$ $((a, b) \in R \wedge (a \neq b)) \rightarrow (b, a) \notin R$
6	Sifat Transitif $a, b, c \in A$ berlaku $((a R b) \wedge (b R c)) \Rightarrow (a R c)$	$((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R$
7	Sifat Ekuivalen Relasi bersifat refleksif, simetri dan transitif	
8	Sifat Partial Order Relasi bersifat Refleksif, Antisimetri dan Transitif	

1. Apakah relasi $AB = \{(a, b) | a^2 = b\}$ pada Z memenuhi semua sifat-sifat relasi?

No	Sifat Relasi	Alasan
1	Tidak Refleksif	$\forall a \in Z$ tidak berlaku $a^2 = a$. Misalnya ambil $a = 2$ maka ternyata $(2,2) \notin R$
2	Tidak Irrefleksif	$\forall a \in Z$ tidak berlaku $\sim (a^2 = a)$. Untuk $a = 1$ terdapat $(1,1) \in R$
3	Tidak Simetri	$a, b \in Z$ seharusnya berlaku $(a^2 = b) \Leftrightarrow (b^2 = a)$. Ternyata terdapat $(2,4) \in R$ tetapi $(4,2) \notin R$
4	Antisimetri	$a, b \in Z$ berlaku $(a^2 = b) \wedge (a = b) \Rightarrow (b^2 = a)$ dan $(a^2 = b) \wedge (a \neq b) \Rightarrow \sim (b^2 = a)$. Misalkan untuk $a = 1, a = b$ maka terdapat $(1,1) \in R$, juga terdapat $(2,4) \in R$ ternyata $(4,2) \notin R$
5	Tidak Asimetri	$a, b \in Z$ seharusnya berlaku $(a^2 = b) \Rightarrow \sim (b^2 = a)$. Namun ambil $a = 1$ dan $b = 1$ ternyata $(1,1) \in R$
6	Tidak Transitif	$a, b, c \in Z$ seharusnya berlaku $(a^2 = b) \wedge (b^2 = c) \Rightarrow (a^2 = c)$. Terdapat $(2,4) \in R$ dan $(4,16) \in R$ namun $(2,16) \notin R$
7	Tidak Ekuivalen	Relasi tidak bersifat refleksif, tidak simetri dan tidak transitif
8	Tidak Partial Order	Relasi bersifat tidak refleksif, antisimetri dan tidak transitif

Jadi, Relasi $AB = \{(a, b) | a^2 = b\}$ pada Z hanya memenuhi sifat **Antisimetri**.

KERJAKAN!

1. Apakah R bersifat Refleksif?
 - a. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Relasi R dengan relasi " \leq " yang didefinisikan pada himpunan A.
 - b. Misalkan $A = \{2, 3, 4, 8, 9, 15\}$. Definisi relasi R pada himpunan A dengan aturan: $(a, b) \in R$ jika a faktor prima dari b
2. Apakah R bersifat Transitif?
 - a. Misalkan $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, dan relasi R didefinisikan oleh : $a R b$ jika dan hanya jika a membagi b, dimana $a, b \in A$
 - b. R merupakan relasi pada himpunan bilangan asli N yang didefinisikan oleh : $R : a + b = 5, a, b \in A,$
3. Misalkan R merupakan relasi pada sebuah himpunan Riil, yang dinyatakan oleh : $a R b$ jika dan hanya jika $a - b \in Z$. Periksa apakah relasi R bersifat simetri !
4. Tunjukkan bahwa relasi ' \leq ' pada himpunan Z bersifat anti simetri
5. Relasi \leq pada $Z \rightarrow Z \leq Z$. Tentukan apakah SQ memiliki sifat refleksif, irrefleksif, simetri, antisimetri, asimetri, transitif, Ekuivalen dan Partial Order ?