2019

FUNGSI

Ramdani Miftah

Program Studi Pendidikan Matematika
UIN Syarif Hidayatullah Jakarta

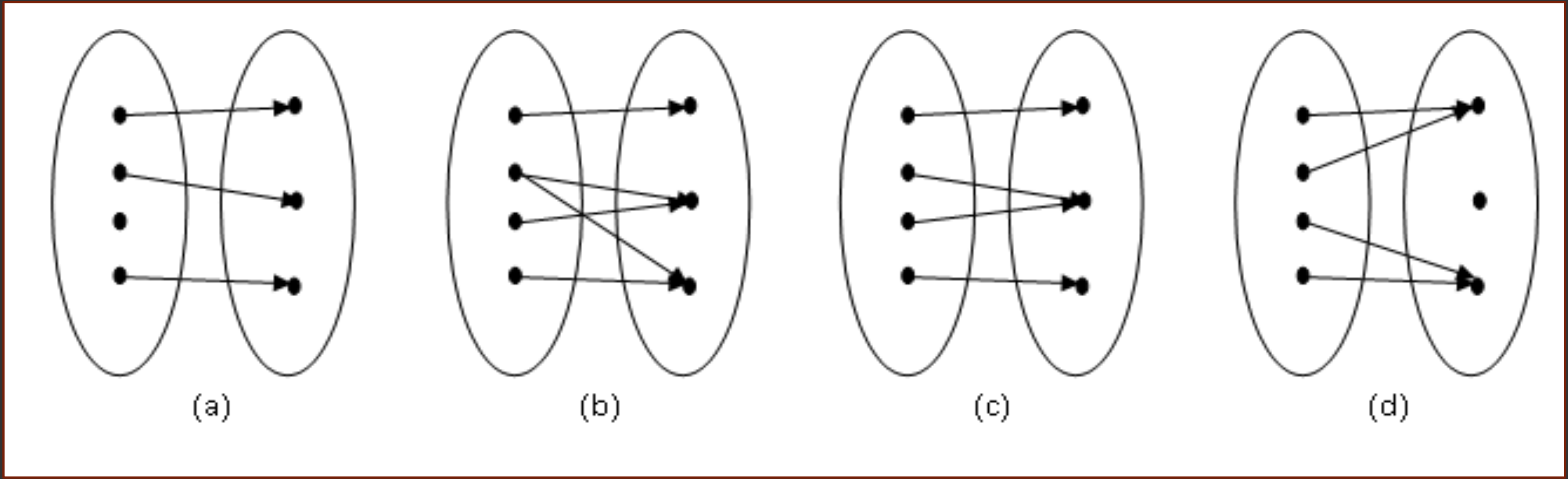
Definisi :

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah **suatu relasi yang memasangkan setiap anggota dari A dengan tepat satu anggota dari B**. Hal ini ditulis:

$$f : A \rightarrow B$$

Contoh 1:

Diagram panah berikut menunjukkan relasi dari himpunan A ke himpunan B. Relasi mana yang merupakan fungsi?



Bila elemen-elemen dari A lebih banyak dari elemn-elemen dari B, dapatkah kita membuat fungsi dari A ke B?

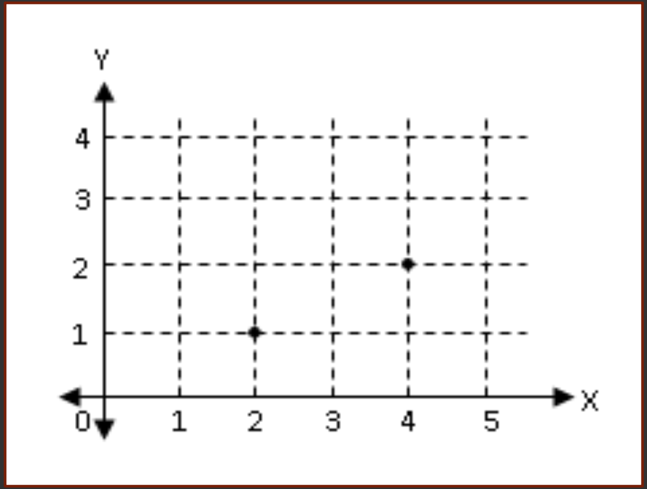
By Ramdani Miftah

Fungsi adalah bentuk relasi khusus. Ada 2 kekhususan, yaitu:

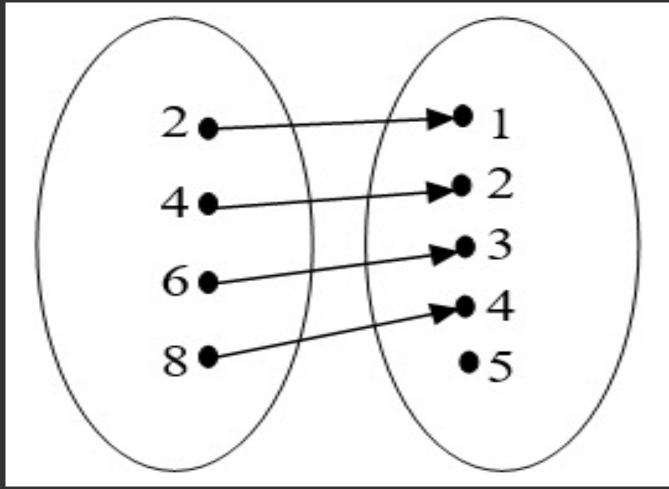
1. Tiap elemen dalam himpunan A, yang merupakan daerah asal f harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan f.
2. Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam himpunan B"berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$ maka $b = c$.

Ada beberapa cara dalam menyajikan fungsi, yaitu:

1. Himpunan pasangan terurut. Contoh: $f = \{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4)\}$
2. Formula. Contoh: $f(x) = \frac{1}{2}x$
3. Grafik



4. Diagram Panah



Contoh:

1. Misalkan $f: Z \to Z$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Tetukan domain dan Range!
2. Misalkan A adalah himpunan mahasiswa UIN Jakarta. Manakah pemetaan berikut yang mendefiniskan sebuah fungsi?
   a. Setiap mahasiswa terhadap NIM
   b. Setiap mahasiswa terhadap nomor HP
   c. Setiap mahasiswa terhadap dosen penasehat akademik (PA)
   d. Setiap ibu terhadap anaknya
3. Dari persamaan-persamaan berikut, mana yang mendefinisikan fungsi ?

a. $y = x^2 + x^4$

b. $xy^3 = 1$

c. $x^2y = 1$

d. $x^2 + y^2 = 4$

e. $x^2 + y^3 = 1$

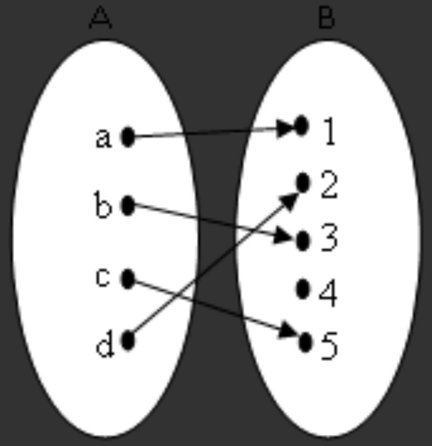
f. $x^3 + y^3 = 1$

Sifat-sifat Fungsi

Ditinjau dari relasinya, fungsi dibedakan menjasi fungsi satu-satu *(injektif),* fungsi pada *(surjektif),* dan fungsi korespondensi satu-satu *(bijektif)*.

1. Fungsi satu-satu *(injektif)*

Fungsi $f: A \to B$, dikatakan fungsi **satu-satu** *(injektif)* jika tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan yang sama di *B*.



Contoh :

a. Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ merupakan fungsi satu-satu ?

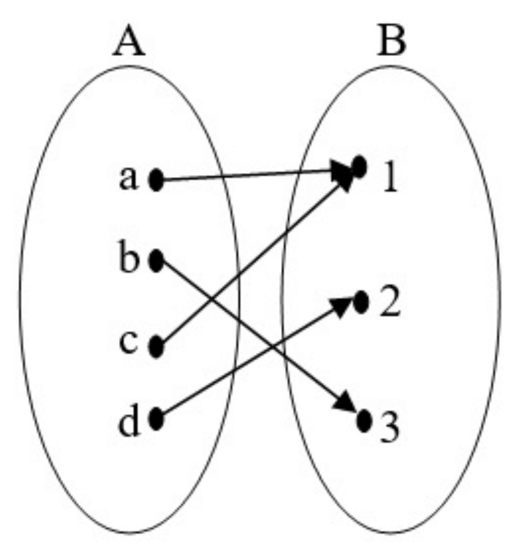
b. Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi satu-satu ?

c. Misalkan $f : B \to B$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-satu ?

By Ramdani Miftah

2. Fungsi pada *(surjektif)*

Fungsi $f: A \rightarrow B$, dikatakan fungsi **pada** *(surjektif)* jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A.



Contoh :

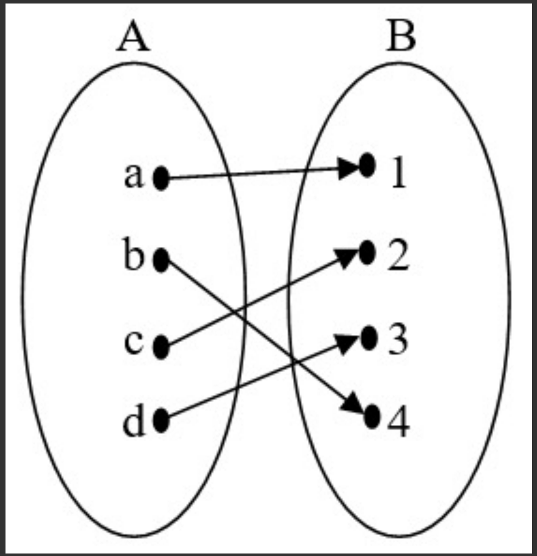
a. Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada ?

b. Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada ?

c. Misalkan $f : B \rightarrow B$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

3. Korespondensi satu-satu *(bijektif)*

Fungsi $f: A \to B$, dikatakan berkorespondensi satu-satu *(bijektif)* jika merupakan fungsi satu-satu dan juga fungsi pada.



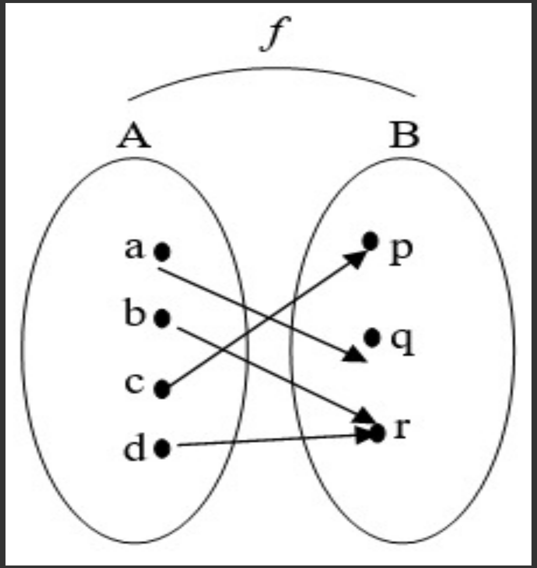
Contoh :

a. Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi yang berkorepondensi satu-satu ?

b. Misalkan $f : B \to B$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkorespondensi satu-satu?

Fungsi Invers

Misalkan $f: A \to B$, didefinisikan seperti pada gambar diagram panah berikut:



Maka : $f(a) = q$, $f(b) = r$, $f(c) = p$, $f(d) = r$

$$f^{-1}(q) = a,\ f^{-1}(r) = b,\ f^{-1}(p) = c,\ f^{-1}(r) = d$$

Rumus umum fungsi invers adalah jika f dan f^{-1} adalah fungsi yang saling invers maka $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Untuk menentukan rumus fungsi invers dari fungsi dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

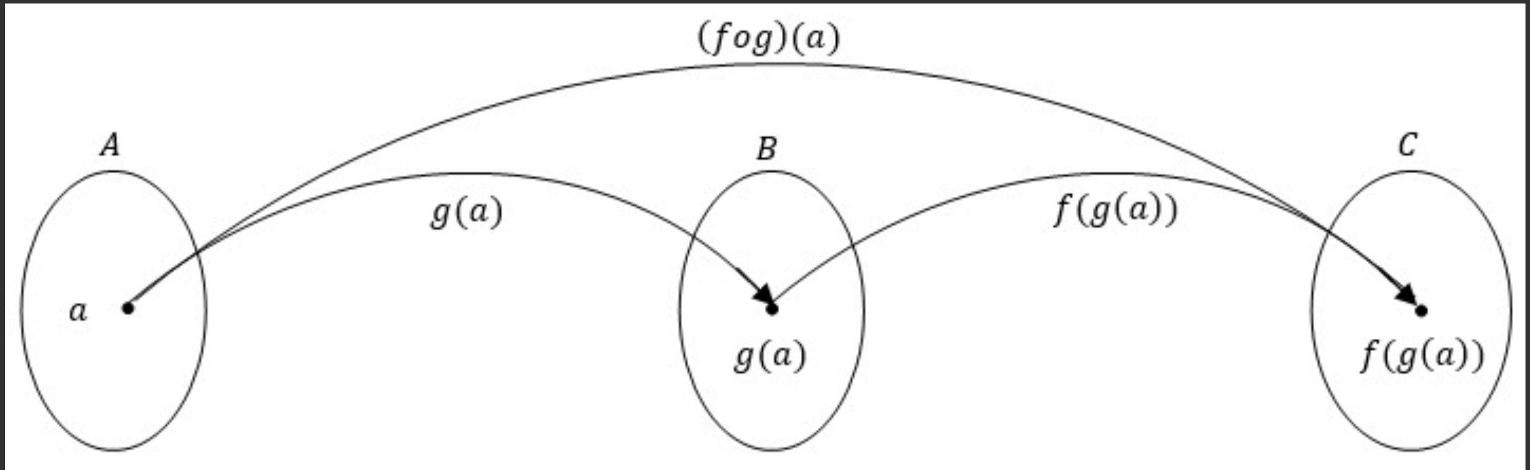
1. Misalkan $f(x) = y$
2. Nyatakan x dalam y
3. Menentukan rumus dari $f^{-1}(x)$ dengan mengingat $f^{-1}(y) = x$
4. Mengganti variabel y dengan variabel x

Contoh: Tentukan fungsi invers dari $f(x) = \frac{3x+4}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$

By Ramdani Miftah

Fungsi Komposisi

Misalkan *g* adalah fungsi dari himpunan *A* ke himpunan *B*, dan *f* adalah fungsi dari himpunan *B* ke himpunan C. Komposisi *f* dan *g*, dinotasikan dengan *f* o *g*, adalah fungsi dari *A* ke C yang didefinisikan oleh : $(fog)(a) = f(g(a))$.



Contoh:

1. Diberikan fungsi $g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi $f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$ yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah $f\ o\ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$.

2. Diketahui fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan :

a. $(f \; o \; g)(2)$

b. $(g \; o \; f)(2)$

c. $(f \; o \; g)(x)$

d. $(g \; o \; f)(x)$

3. Jika $f(x) = 2x - 3$ dan $(g \; o \; f)(x) = 2x + 1$, maka tentukan $g(x)$!

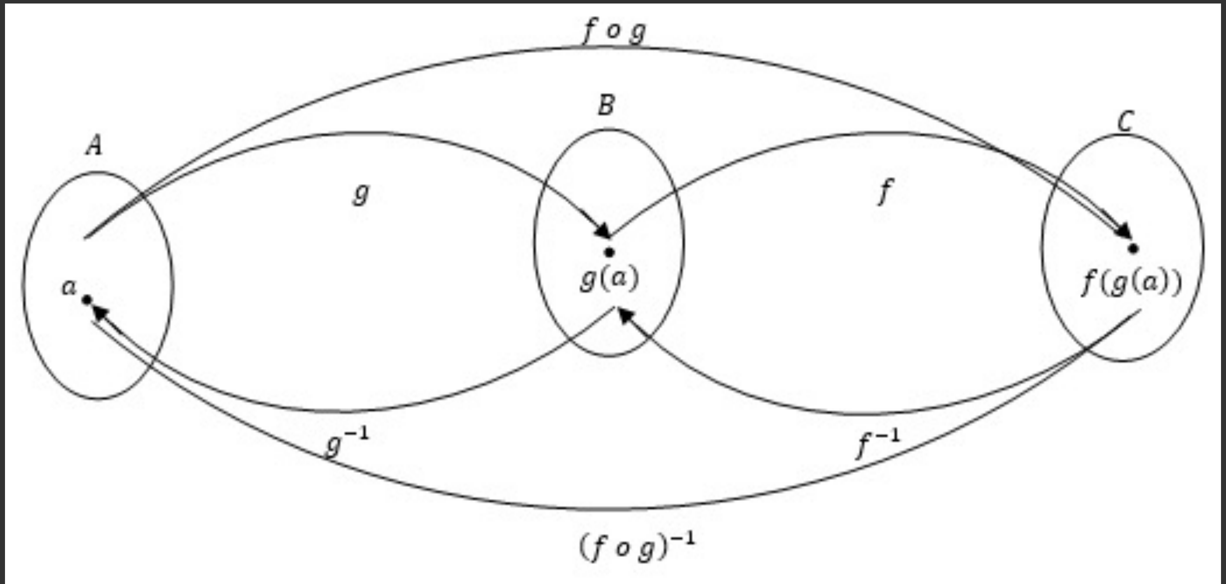
4. Misalkan f : Z → Z dan g : Z → Z , diberikan fungsi f(x) = x + 1 dan g(x) = x^2 . Tentukan f o g dan g o f .

5. Jika $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}$ dan $f \; o \; g \; (x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+7}}$ maka $g(x+2) = \ldots$

6. Jika $f(x) = \frac{x+2017}{x-1}$ maka $(fofofofof)(x) = \ldots$

Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi

- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- $(f \circ g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$



Contoh:

1. Diketahui $f(x) = \frac{px+q}{x+2}, q \neq 0$ jika f^{-1} menyatakan invers dari f dan f^{-1}(q)=-1 maka f^{-1}(2q)=...
2. Jika f(x) = 5^x dan g(x) = x^2+3, untuk x ≠ 0 maka $f^{-1}(g(x^2)-3)$

By Ramdani Miftah