PENGANTAR DASAR MATEMATIKA

Buku ini terbagi dalam 6 bab, yaitu bab 1 logika, bab 2 sistem bilangan riil, bab 3 himpunan, bab 4 induksi matematika, bab 5 relasi dan fungsi, bab 6 barisan dan deret. Dengan adanya buku ini mahasiswa memiliki kemampuan dan wawasan bagaimana cara berpikir seorang matematikawan dalam memahami berbagai teori-teori dasar matematika, yakni harus mengikuti batasan kaidah-kaidah matematika yang telah ditetapkan.

PT Insan Cendekia Mandiri Group
Perumahan Gardena Maisa 2 Blok A03, Koto Baru,
Kec. Kubung, Kab. Solok, Sumatra Barat
Email: insancendekiamandirigroup@gmail.com
Website: www.insancendekiamandiri.co.id

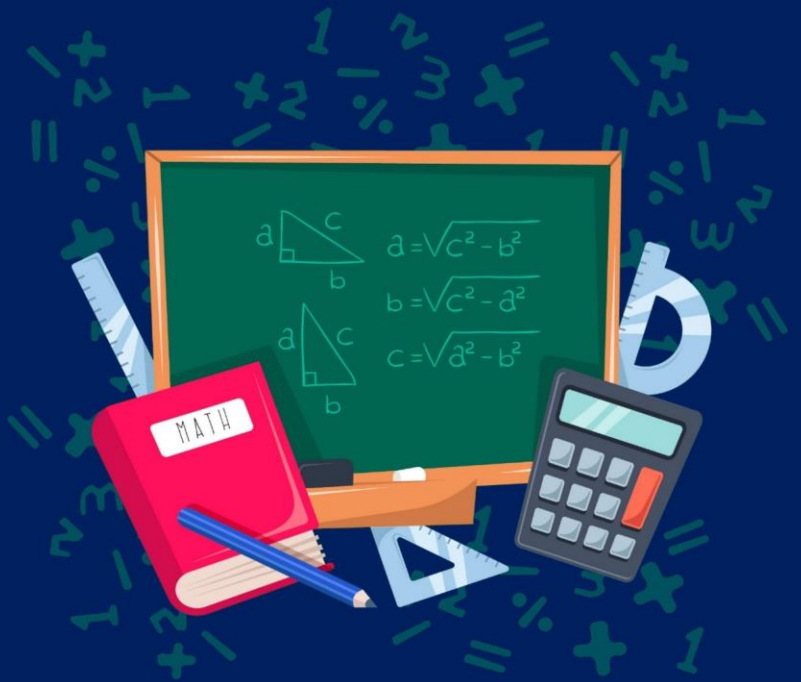
IKAPI
IKATAN PENERBIT INDONESIA

PENDIDIKAN
ISBN 978-623-348-916-4
9 786233 489164

Pengantar Dasar Matematika

Ramdani Miftah, M.Pd.

PENGANTAR DASAR MATEMATIKA



Ramdani Miftah, M.Pd.

PENGANTAR
DASAR MATEMATIKA

UU No 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4
Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26
Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

i. penggunaan kutipan singkat ciptaan dan/atau produk hak terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
ii. penggAndaan ciptaan dan/atau produk hak terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
iii. penggAndaan ciptaan dan/atau produk hak terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan fonogram yang telah dilakukan pengumuman sebagai bahan ajar; dan
iv. penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu ciptaan dan/atau produk hak terkait dapat digunakan tanpa izin pelaku pertunjukan, produser fonogram, atau lembaga penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

PT Insan Cendekia
Mandiri Group

PENGANTAR
DASAR MATEMATIKA

Ramdani Miftah, M.Pd.

Pengantar Dasar Matematika

Ramdani Miftah, M.Pd.

Editor:
Meri Sutri Yani

Desainer:
Mifta Ardila

Sumber:
www.freepik.com

Penata Letak:
Meri Sutri Yani

Proofreader:
Tim ICM

Ukuran:
viii, 99 hlm., 15,5x23 cm

ISBN:
978-623-348-916-4

Cetakan Pertama:
Agustus 2022

Hak Cipta 2022, pada Ramdani Miftah, M.Pd.

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau
memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini
tanpa izin tertulis dari Penerbit.

Anggota IKAPI: 020/SBA/20

PENERBIT INSAN CENDEKIA MANDIRI
(Grup Penerbitan PT INSAN CENDEKIA MANDIRI)

Perumahan Gardena Maisa 2, Blok F03, Nagari Koto Baru, Kecamatan Kubung,
Kabupaten Solok, Provinsi Sumatra Barat – Indonesia 27361
HP/WA: 0813-7272-5118
Website: www.insancendekiamandiri.com
E-mail: penerbitbic@gmail.com

Daftar Isi

Prakata vii
BAB I LOGIKA 1
A. PROPOSISI *(Proposition)* 1
B. PERNYATAAN BERKUANTOR 7
C. KESETARAAN DUA PERNYATAAN 9
D. PENARIKAN KESIMPULAN 9
BAB II SISTEM BILANGAN RIIL 19
A. Sistem Bilangan Riil 19
B. Operasi pada Bilangan Riil 21
C. Pertidaksamaan 23
D. Selang *(interval)* 24
E. Pertidaksamaan Linear Satu Peubah 25
F. Nilai Mutlak 25
BAB III HIMPUNAN 29
A. Konsep Himpunan 29
B. Penyajian Himpunan 30
C. Jenis Himpunan 32
D. Hubungan Antar Himpunan 34
E. Kesamaan Himpunan 37
F. Operasi Terhadap Himpunan 38
G. Hukum-hukum Aljabar Himpunan 42
H. Pembuktian Kalimat Himpunan 43
I. Implementasi Himpunan 47

BAB IV INDUKSI MATEMATIKA 55
A. Tahapan Induksi Matematika 55
B. Pembuktian Induksi Matematika 55
BAB V RELASI DAN FUNGSI 59
A. Relasi 59
1. Definisi Relasi 59
2. Sifat-sifat Relasi 63
B. Fungsi 66
1. Definisi Fungsi 66
2. Cara Menyajikan Fungsi 68
3. Sifat-sifat Fungsi 70
4. Macam-macam Fungsi 73
5. Aljabar Fungsi 74
6. Fungsi Invers 75
7. Fungsi Komposisi 77
8. Grafik 79
BAB VI BARISAN DAN DERET 85
A. Notasi sigma 85
B. Barisan Aritmatika 87
C. Deret Aritmatika 88
D. Sisipan Aritmatika 89
E. Barisan Geometri 90
F. Deret Geometri 91
G. Sisipan Geometri 92
H. Deret Geometri Tak Hingga 92
Referensi 93
Tentang Penulis 98

Prakata

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Swt. karena atas perkenan-Nya penulis telah dapat menyelesaikan sebuah buku yang berjudul ***"Pengantar Dasar Matematika"***. Penulis berterima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan memberikan dukungan dalam proses penyelesaian buku ini. Kepada keluarga, rekan sejawat, dan seluruh tim Insan Cendekia Mandiri yang telah melakukan proses penerbitan, penulis ucapkan terima kasih.

Tim Penulis

BAB I
LOGIKA

A. PROPOSISI *(Proposition)*

Dalam matematika dikenal ada (3) tiga kalimat, yaitu:

a. Kalimat pernyataan (kalimat tertutup)
b. Kalimat terbuka
c. Kalimat bukan pernyataan

Definisi

Proposisi (pernyataan) adalah kalimat deklaratif yang bernilai benar *(true)* atau salah *(false),* tetapi tidak dapat sekaligus keduanya.

Apakah kalimat-kalimat berikut merupakan pernyataan/bukan?

a. Semua sudut pada segitiga sama sisi sama
b. $x^2 + 2x - 15 = 0$
c. Tutuplah pintu dari luar!
d. Apakah ibu ada di rumah?
e. Alangkah indahnya lukisan ini
f. Hari kemarin hujan

Tentukan kalimat berikut pernyataan yang benar atau salah!

a. Grafik fungsi $f(x) = x^2 - 2x - 8$ melalui titik (-2, 0)
b. $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ untuk x = -1
c. $(x + 3)^2 > 0$ untuk semua x anggota bilangan real
d. Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap
e. $x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil

Secara simbolik, proposisi biasanya dilambangkan dengan huruf kecil seperti *p, q, r,...dll.*

Misalnya:

p: 6 adalah bilangan genap
q: Soekarno adalah Presiden Indonesia pertama.
r: $2 + 2 = 4$

Sedangkan untuk nilai benar *(true)* dan salah *(false)* dilambangkan berturut-turut *B* dan *S.*

A. PROPOSISI MAJEMUK *(Compound Proposition)*

Definisi

Proposisi majemuk adalah suatu pernyataan yang dibentuk dari beberapa proposisi tunggal dengan menggunakan kata penghubung *dan, atau, jika...maka, ...jika dan hanya jika....*

Ada beberapa proposisi majemuk yaitu:

1. Konjungi

Aturan:

Konjungsi dua pernyataan *p* dan *q* (ditulis "$p \wedge q$" dibaca "*p* dan *q*") bernilai **benar** jika dan hanya jika dua pernyataan *p* dan *q* masing-masing bernilai **benar**, sedangkan untuk nilai-nilai kebenaran *p* dan *q* lainnya "$p \wedge q$" bernilai **salah**.

2. Disjungsi

Aturan:

Disjungsi dua pernyataan p dan q (ditulis "$p \vee q$" dibaca p atau q) bernilai **salah** jika dan hanya jika dua pernyataan p dan q masing-masing bernilai **salah**, sedangkan untuk nilai-nilai kebenaran p dan q lainnya, "$p \vee q$" bernilai **benar**.

3. Ingkaran *(negasi)*

Definisi:

Negasi suatu pernyataan adalah suatu pernyataan yang bernilai **salah** jika pernyataan semula bernilai **benar**, dan bernilai **benar** jika pernyataan semula bernilai **salah**.

Contoh:

1) Diketahui proposisi-proposisi berikut
   p: hari ini hujan
   q: hari ini dingin
   Kalimat dari notasi simbolik berikut adalah $q \vee \sim p$, $\sim p \wedge \sim q$, $\sim(\sim p)$
2) Diketahui proposisi-proposisi berikut.
   p: pemuda itu tinggi
   q: pemuda itu tampan
   Nyatakan proposisi berikut ke dalam notasi simbolik: (asumsi "Pemuda itu pendek" berarti "Pemuda itu tidak tinggi")
   a. Pemuda itu tinggi tetapi tidak tampan *(Cat. "Tetapi" bermakna sama dengan "Dan")*
   b. Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
   c. Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan

d. Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
e. Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

4. Implikasi

Pada implikasi "$p \Longrightarrow q$", pernyataan tunggal "p" disebut pendahulu *(antecedent)* dan pernyataan "q" disebut pengikut *(consequent).*

> *Aturan:*
> Suatu implikasi bernilai **salah** jika dan hanya jika pendahulunya bernilai **benar** dan pengikutnya bernilai **salah**, sedangkan untuk nilai-nilai kebenaran pendahulu dan pengikutnya yang lain, implikasi itu bernilai **benar**.

Implikasi tidak hanya diekspresikan dalam pernyataan standar **"Jika *p*, maka *q*"** tetapi bisa dalam berbagai cara, yaitu:

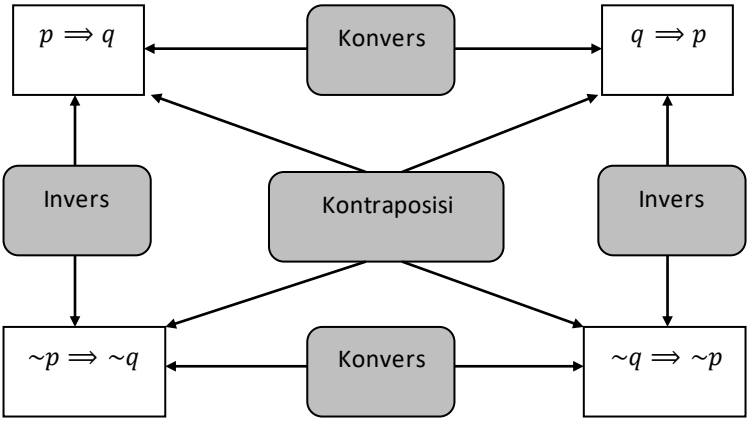
a. Jika p, maka q
b. Jika p, q
c. p mengakibatkan q
d. q jika p
e. p hanya jika q
f. p syarat cukup agar q
g. q syarat perlu bagi p
h. q bilamana p

Contoh:

1) Es yang mencair di kutub **mengakibatkan** permukaan air laut naik.
2) Percikan api dari rokok **syarat cukup agar** pom bensin meledak.
3) Mengontrak pemain asing kenamaan **syarat perlu bagi** Indonesia agar ikut piala dunia.
4) Banjir bandang terjadi **bilamana** hutan ditebangi.

Terdapat bentuk implikasi lain yang berkaitan dengan $p \Longrightarrow q$ yaitu*: konvers, invers* dan *kontraposisi.*
Konvers (kebalikan): $q \Longrightarrow p$

Invers : $\sim p \Longrightarrow \sim q$
Kontraposisi : $\sim q \Longrightarrow \sim p$



Contoh:

Buatlah notasi simbolik dan kalimat yang berbentuk konvers, invers dan kontraposisi dari implikasi berikut ini: "Jika hari ini hujan, maka matahari tidak terlihat bersinar".

5. Biimplikasi

Aturan:

Nilai kebenaran dari "$\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$" adalah **benar**, jika dan hanya jika nilai kebenaran dari p **sama** dengan nilai kebenaran dari q, dan bernilai **salah** apabila nilai kebenaran dari p **berlainan** dengan nilai kebenaran dari q.

Terdapat sejumlah cara untuk menyatakan biimplikasi, yaitu:

1) p jika dan hanya jika q
2) p adalah syarat perlu dan cukup untuk q
3) Jika p maka q, dan sebaliknya

Contoh:

1) Kelembaban udara tinggi adalah **syarat perlu dan cukup** agar hari ini hujan.
2) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.

Jika semua proposisi majemuk di atas dirangkum dalam bentuk tabel kebenaran maka akan menjadi seperti berikut:

Tabel Kebenaran

Negasi, Konjungsi, Disjungsi, Implikasi dan Biimplikasi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	S	S
S	B	B	S	S	B	B	S
S	S	B	B	S	S	B	B

Kasus:

Sebuah pulau didiami oleh dua suku asli. Penduduk suku pertama selalu mengatakan hal yang benar, sedangkan penduduk dari suku lain selalu mengatakan kebohongan. Anda tiba di pulai ini dan bertanya kepada seorang penduduk setempat apakah di pulau tersebut ada emas atau tidak?. Ia menjawab "Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran". Apakah ada emas di pulau tersebut?

6. Ingkaran (Negasi) Suatu Pernyataan Majemuk

a. Negasi Konjungsi $p \wedge q$ adalah $\sim p \vee \sim q$ atau ditulis:

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

b. Negasi Disjungsi $p \vee q$ adalah $\sim p \wedge \sim q$ atau ditulis:

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

c. Negasi Implikasi $p \Longrightarrow q$ adalah $p \wedge \sim q$ atau ditulis:

$$\sim(p \Longrightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

d. Negasi Biimplikasi $p \Longleftrightarrow q$ adalah $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ atau ditulis:

$$\sim(p \Longleftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

Contoh: Tentukan negasi dari pernyataan majemuk "Saya lulus ujian jika dan hanya jika saya rajin belajar".

B. PERNYATAAN BERKUANTOR

Definisi

Kuantor adalah suatu lambang yang menunjukkan generalisasi suatu kalimat terbuka.

Ada dua macam kuantor, yaitu:

1. **Kuantor Eksistensial**

   Kuantor sebagian (ada, beberapa, terdapat, atau sekurang-kurangnya satu). Dilambangkan dengan $\exists x$ dibaca "ada suatu x sehingga berlaku…". Jika $P(x)$ adalah suatu kalimat terbuka, maka $(\exists x)P(x)$; mempuyai arti **ada x sedemikian sehingga berlaku $P(x)$**.

   Contoh: Benar atau salah pernyataan berikut.

   a. $(\exists x \in R)(2x + 1 > 5)$

   b. $(\exists x)(x \in R \Longrightarrow x^2 < 0)$

2. **Kuantor Universal**

   Kuantor semua (semua, setiap, untuk tiap-tiap, seluruh, atau tanpa kecuali). Dilambangkan dengan $\forall x$ dibaca

"Untuk semua x atau setiap x sehingga berlaku…". Jika $P(x)$ adalah suatu kalimat terbuka, maka $(\forall x)P(x)$; mempuyai arti **untuk semua x berlaku $P(x)$.**

Contoh: Benar atau salah pernyataan berikut.

a. $(\forall x \in R)(2x + 1 > 5)$

b. $(\forall x)(x \in R \Longrightarrow x^2 \geq 0)$

3. Negasi Suatu Pernyataan Berkuantor

a. Negasi Kuantor Eksistensial

Ingkaran kuantor eksistensial adalah kuantor universal.

Misal: "Ada mahasiswa jurusan MTK yang tidak masuk kuliah" dapat dipatahkan dengan pernyataan "Semua mahasiswa jurusan MTK masuk kuliah".

Secara simbolik dapat ditulis:

$\sim[(\exists x)P(x)] = (\forall x)[\sim P(x)]$

Contoh:

Tentukan negasi dan nilai kebenaran dari pernyataan berikut:

$(\exists x)(x \in R) \Longrightarrow (2x + 1 = 9)$

b. Negasi Kuantor Universal

Ingkaran kuantor universal adalah kuantor eksistensial.

Misal: "**Semua** bilangan prima adalah ganjil" dapat dipatahkan dengan pernyataan "**Ada** paling sedikit satu bilangan prima yang tidak ganjil".

Secara simbolik dapat ditulis:

$\sim[(\forall x)P(x)] = (\exists x)[\sim P(x)]$

Contoh: Tentukan negasi dan nilai kebenaran dari pernyataan berikut:

$(\forall x)(x \in \{\text{ganjil}\}) \Longrightarrow (x \text{ tidak habis dibagi } 2)$

C. KESETARAAN DUA PERNYATAAN

Definisi:
Sebuah proposisi majemuk disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kasus, sebaliknya disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kasus, serta disebut **kontingensi** jika ia menghasilkan pernyataaan yang benar atau salah.

Contoh:

Misalkan p dan q adalah proposisi. Tunjukkan proposisi majemuk berikut adalah sebuah tautologi, kontradiksi atau kontingensi.

a. $p \wedge \sim p$
b. $p \vee \sim(p \wedge q)$
c. $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$

D. PENARIKAN KESIMPULAN

1. Penarikan Kesimpulan

Proses penarikan kesimpulan dari beberapa proposisi disebut Inferensi *(Inference).*

Pola penarikan kesimpulan disajikan dengan bentuk.

Premis (1)	P_1
Premis (2)	P_2
Premis (3)	P_3
…….....	…
Premis (n)	P_n
∴ Konklusi	$\therefore k$

Penarikan kesimpulan dikatakan sah jika $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ldots \wedge P_n) \Longrightarrow k$ merupakan **tautologi.** Beberapa pola penarikan kesimpulan yang sah diantaranya:

1. **Modus Ponen** atau *law of detachment*
   $p \Longrightarrow q$
   p
   $\therefore \quad q$
2. **Modus Tollen**
   $p \Longrightarrow q$
   $\sim q$
   $\therefore \quad \sim p$
3. **Silogisme Hipotesis**
   $p \Longrightarrow q$
   $q \Longrightarrow r$
   $\therefore \quad p \Longrightarrow r$
4. **Silogisme Disjungtif**
   $p \vee q$
   $\sim p$
   $\therefore \quad q$
5. **Simplifikasi**
   $p \wedge q$
   $\therefore \quad p$
6. **Penjumlahan**
   p
   $\therefore \quad p \vee q$
7. **Konjungsi**
   p
   q
   $\therefore \quad p \wedge q$
8. **Dilemma Konstruktif**
   $p \Longrightarrow q$
   $r \Longrightarrow s$
   $p \vee q$
   $\therefore \quad q \vee s$
9. **Dilemma Destruktif**
   $p \Longrightarrow q$
   $r \Longrightarrow s$
   $\sim q \vee \sim s$
   $\therefore \sim p \vee \sim r$

Definisi: "Sebuah argumen dikatakan sahih jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar, sebaliknya dikatakan palsu (invalid)"

Contoh:

a. Periksa kesahihan argument berikut.
   1) Jika 20 habis dibagi 2 maka 20 adalah bilangan genap
      20 habis dibagi 2
      $\therefore$ 20 bilangan genap

2) Jika n bilangan ganjil, maka n^2 bernilai ganjil
n^2 bernilai genap

∴ n bukan bilangan ganjil

3) Saya belajar dengan giat atau saya menikah tahun depan
saya tidak belajar dengan giat

∴ saya menikah tahun depan

4) Jika air laut surut setelah gempa di laut maka tsunami datang
air laut surut setelah gempa di laut

∴ karena itu tsunami datang

5) Jika air laut surut setelah gempa di laut maka tsunami datang
tsunami datang

∴ Jadi, air laut surut setelah gempa di laut

b. Buktikan bahwa argumen berikut valid.

1) Jika pintu kereta api ditutup, lalu lintas akan berhenti.
Jika lalu lintas berhenti, akan terjadi kemacetan lalu lintas.
Pintu kereta api ditutup.
Jadi, terdapat kemacetan lalu lintas.

2) Pak Ali adalah seorang pedagang atau petani.
Jika pak Ali seorang pedagang, maka ia kaya.
Ternyata Pak Ali tidak kaya.
Jadi, Pak Ali seorang petani.

2. Aturan Penukaran

Pada kenyataannya banyak argument valid yang tidak dapat di buktikan kebenarannya hanya dengan menggunakan aturan penarikan kesimpulan. Ini berarti kita membutuhkan aturan lain selain aturan diatas. Aturan yang menunjang ini disebut **aturan penukaran**

(Rule of Replacements). Dalam pembicaraan ekuivalensi, kita telah mengetahui bahwa dua pernyataan disebut ekuivalen jika mempunyai nilai kebenaran yang sama. Dengan demikian jika sebagian atau keseluruhan dari suatu pernyataan majemuk ditukar dengan pernyataan lain yang ekuivalen secara logika, maka nilai kebenaran pernyataan majemuk yang baru tersebut akan sama dengan nilai kebenaran pernyataan majemuk semula. Aturan ini yang disebut **aturan penukaran.** Aturan ini memungkinkan kita untuk menarik kesimpulan suatu pernyataan sebagai hasil dari penukaran semua atau sebagian dari suatu pernyataan dengan pernyataan yang ekuivalen dengan bagian yang kita ganti.

Adapun aturan yang terdapat pada *Rule of Replacements* adalah sebagai berikut:

a. Teorema De Morgan (de M)
   $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
   $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
b. Komutatif (Kom)
   $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   $p \vee q \equiv q \vee p$
c. Asosiative (Ass)
   $(p \wedge q) \equiv r \wedge p \wedge (q \wedge r)$
   $(p \vee q) \equiv r \vee p \vee (q \vee r)$
d. Distributif (Distr)
   $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
e. Doubel Negasi (DN)
   $\sim (\sim p) \equiv p$
f. Transposisi (Trans)
   $p \Longrightarrow q \equiv \sim q \Longrightarrow \sim p$
g. Material implikasi (Impl)
   $p \Longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$

h. Material ekuivalensi (ekuiv)
   $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$
   $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
i. Eksportasi (Eksp)
   $(p \wedge q) \Longrightarrow r \equiv p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)$
j. Tautologi (Taut)
   $p \equiv (p \vee p)$
   $p \equiv (p \wedge p)$

Pernyataan-pernyataan diatas yang saling ekuivalen, dapat saling mengganti satu sama lain. Artinya kita dapat menukar pernyataan sebelah kiri dengan pernyataan disebelah kanan dan sebaliknya.

Contoh: Susunlah bukti formal validitas argument berikut

$(p \vee q) \Longrightarrow (r \wedge s)$
$\sim r$
$\therefore \sim q$

3. Aturan Pembuktian Tidak Langsung

Aturan pembuktian tidak langsung *(Rule of Indirect Proof)* dilakukan dengan jalan membuat negasi dari konklusinya, yang kemudian dijadikan premis tambahan. Jika sebagai akibat langkah ini timbul kontradiksi berarti argument yang akan dibuktikan valid.

Contoh: Susunan pembuktian tidak langsung untuk memperlihatkan validitas argument berikut

$P \Longrightarrow Q$
$Q \Longrightarrow R$
P
$\therefore R$

Latihan Soal

1. Apakah kalimat-kalimat berikut merupakan pernyataan/bukan?
   a. Pontianak berada di pulau Kalimantan
   b. 5 lebih dari 7
   c. Surabaya lebih jauh dari Jakarta
   d. Kerjakan soal latihan dalam buku ini dengan baik!
   e. Bilangan asli yang kurang dari 5
   f. Di mana alamat rumahmu?

2. Tentukan nilai kebenaran dari kalimat-kalimat berikut:
   a. Anak yang diterima di SLTA adalah anak yang sudah lulus SLTP dan rata-rata NEM-nya lebih dari 7,5.
   b. Surabaya di Jawa Timur atau Jawa Barat.
   c. Jika $2 + 3 = 23$, maka Indonesia merupakan salah satu negara di Asia.
   d. $25 = 20 + 5$ jika dan hanya jika Bali berada di Australia.

3. Pada suatu rumah makan, ANDI seorang mahasiswa sedang duduk mengelilingi meja makan berbentuk persegi dengan tiga orang temannya. Ketiga teman ANDI tersebut bekerja sebagai Guru, Dosen, Manajer. Tentukan pekerjaan ASEP jika:
   ANDI duduk di sebelah kiri CHANDRA,
   ASEP duduk di sebelah kanan Guru
   ALEX duduk berhadapan dengan CHANDRA dimana CHANDRA bukan seorang DOSEN.

4. Jika pernyataan *p, q* dan *r* berturut-turut mempunyai nilai kebenaran B, S dan B. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk berikut ini!
   a. $p \Longrightarrow (q \wedge r)$
   b. $p \Leftrightarrow (q \vee r)$
   c. $\sim q \Leftrightarrow (p \vee r)$
   d. $\sim(p \wedge r) \Longrightarrow q$

5. Dua pedagang barang kelontongan mengeluarkan moto jitu untuk menarik pembeli. Pedagang pertama mengumbar moto **"Barang bagus tidak murah"** sedangkan pedagang kedua mempunyai moto **"Barang murah tidak bagus".** Apakah kedua moto pedagang tersebut menyatakan hal yang sama? *(buktikan dengan tabel kebenaran)*

6. Jika *p, q* dan *r* adalah proposisi. Bentuklah tabel kebenaran dari ekspresi logika berikut:
   a. $[(p \Longrightarrow q) \wedge \sim q] \Longrightarrow \sim p$
   b. $p \Longrightarrow (q \vee \sim q)$
   c. $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
   d. $[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$

7. Tentukan konvers, invers dan kontraposisi dari implikasi berikut ini!

No.	Implikasi	Konvers	Invers	Kontraposisi
1	$\sim p \Longrightarrow q$			
2	$p \Longrightarrow \sim q$			
3	$\sim p \Longrightarrow \sim q$			
4	$a \Longrightarrow \sim(b \wedge c)$			
5	$\sim a \Longrightarrow \sim(b \vee c)$			

8. Tentukan negasi dan kontraposisi dari pernyataan berikut: “Dia tidak pergi ke kampus maupun ke perpustakaan bilamana hari ini hujan”. (terapkan hukum-hukum logika)

9. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berkuantor berikut ini.
   a. $(\forall x)(x \in R, x^2 > 0) \Longrightarrow (x > 0)$
   b. $(\exists x, y)(x, y \in R, x > 0, y > 0) \Longrightarrow (xy < 0)$

10. Buatlah ingkaran dari setiap pernyataan berkuantor berikut ini dan tentukan nilai kebenarannya.
   a. $(\forall x)(x \in R \Longrightarrow x^2 > 0)$
   b. $(\exists x)(x \in R, x > 0) \Longrightarrow (x + 5 > 0)$

11. Perikasalah pernyataan-pernyataan berikut ini apakah merupakan tautologi atau kontradiksi dengan menyusun tabel kebenaran.
   a. $(p \vee q) \Longrightarrow q$
   b. $[(\sim p \Longrightarrow q) \wedge \sim q] \Longrightarrow p$

12. Tentukan kesimpulan yang dapat diambil dari premis-premis berikut
   a. Jika saya naik kelas, maka kamu saya belikan nasi goreng.
      Saya naik kelas.
      ∴ .....
   b. Jika tidak hujan, maka saya akan belajar di rumahmu.
      Saya tidak belajar di rumahmu
      ∴ .....
   c. Jika 12 habis dibagi 6, maka 6 habis dibagi 2.
      Jika 6 habis dibagi 2, maka Jakarta ibukota Indonesia
      ∴ .....

13. Periksa kesahihan argument berikut
    a. Jika Edi sakit maka Edi tidak bekerja
       Jika Edi tidak bekerja maka Edi tidak memperoleh gaji

       ∴ Jika Edi sakit maka Edi tidak memperoleh gaji
    b. Jika saya pulang kampung, maka saya tidak bisa mengikuti ujian susulan
       Jika saya tidak lulus ujian, maka saya pulang kampung.
       Saya bisa mengikuti ujian susulan

       ∴ Saya lulus ujian
    c. Jika Amin lulus ujian maka Amin memperoleh hadiah
       Ternyata Amin tidak memperoleh hadiah

       ∴ Amin tidak lulus ujian
    d. Pagi ini Joni pergi kesekolah atau Joni pergi ke toko
       Pagi ini Joni tidak pergi ke toko

       ∴ Pagi ini Joni pergi ke sekolah
    e. Jika 5 lebih kecil dari 4 maka 5 bukan bilangan prima
       5 tidak lebih kecil dari 4

       ∴ 5 adalah bilangan prima
    f. Jika Amin lulus ujian maka Amin memperoleh hadiah
       Ternyata Amin memperoleh hadiah

       ∴ Amin lulus ujian
    g. Jika saya menyukai matematika maka saya belajar sungguh-sungguh.
       Saya belajar sungguh-sungguh atau saya gagal

       ∴ Jika saya gagal, maka saya tidak menyukai matematika
    h. Diketahui premis-premis berikut ini.
       1) Jika budi lulus ujian, maka budi kuliah di perguruan tinggi
       2) Jika Budi kuliah di perguruan tinggi, maka Budi menjadi sarjana.

3) Budi tidak menjadi sarjana.
Kesimpulan yang sah dari ketiga premis di atas adalah…

14 Buktikan bahwa argument berikut adalah valid

a. Jika Ibu pergi ke pasar, maka bapak pergi ke kantor.
Ibu dan kakak pergi ke pasar.
Jadi, bapak pergi ke kantor

b. $(p \wedge q) \Longrightarrow r$
$p \wedge s$
$q \wedge t$
$\therefore r$

c. $(p \wedge q) \Longrightarrow (s \wedge t)$
$(p \wedge q) \wedge r$
$\therefore s \vee t$

15. Dengan menggunakan aturan penarikan kesimpulan dan atau aturan penukaran, susunlah bukti formal validitas argument berikut:

a. $G \Longrightarrow (S \Longrightarrow U)$
G
$\sim U$
$\therefore \sim S$

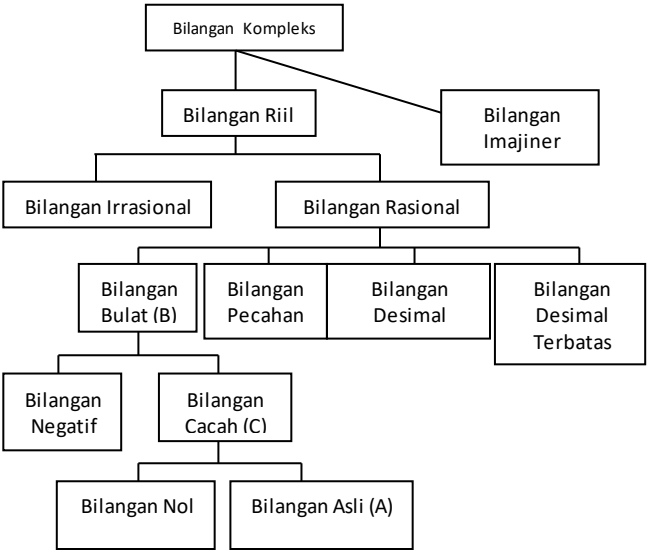
b. P
$(P \vee R) \Longrightarrow D$
$\therefore P \wedge D$

c. $B \Longrightarrow J$
$H \Longrightarrow D$
$\sim (\sim J \vee \sim D) \Longrightarrow U$
$\sim U$
$\therefore \sim B \vee \sim H$

BAB II
SISTEM BILANGAN RIIL

A. Sistem Bilangan Riil

Sistem bilangan merupakan dasar matematika. Oleh karena itu, sangatlah penting untuk mengenal berbagai jenis bilangan dan perbedaan di antara bilangan-bilangan tersebut. Sistem bilangan riil adalah himpunan bilangan riil dan operasi aljabar yaitu operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Biasanya bilangan riil dilambangkan dengan **R.** Secara skematis dapat ditunjukk-an pada bagan berikut ini.



1. **Bilangan asli** : $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, \dots\}$
2. **Bilangan cacah** : $\mathbf{C} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
3. **Bilangan bulat** : $\mathbf{B} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
4. **Bilangan rasional**

Bilangan rasional adalah bilangan yang mempunyai bentuk $\frac{p}{q}$ atau bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk $\frac{p}{q}$, dimana p dan q adalah anggota bilangan bulat dan $q \neq 0$.

$Q = \frac{\text{p}}{\text{q}} | \text{p dan q} \in \text{B}, \text{q} \neq 0$

Contoh: Buktikan bahwa bilangan-bilangan berikut!

a. 0,333…
b. 0,123123…
c. 2,5858…

adalah bilangan rasional!

Bilangan desimal yang mempunyai angka dibelakang tanda koma tak terbatas dan tak berulang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pembagian bilangan bulat $\frac{\text{p}}{\text{q}}$. Seperti (3,01001000100001000001 …).

1. **Bilangan Irrasional**

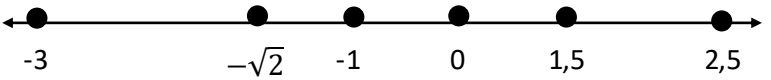
   Bilangan irrasional adalah bilangan-bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai pembagian bilangan bulat.

   Contoh:

   Bilangan $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional.

2. **Bilangan Riil**

   Gabungan bilangan rasional dengan irrasional membentuk suatu himpunan bilangan yang disebut bilangan riil dan dinotasikan dengan R. Garis bilangan riil adalah tempat kedudukan titik-titik yang menunjukkan suatu bilangan riil tertentu yang tersusun secara terurut. Perhatikan garis bilangan riil berikut:



3. **Bilangan Imajiner**

   Bilangan kompleks yang bukan bilangan riil disebut bilangan imajiner. Jadi bilangan imajiner berbentuk bi dengan $b \in R$.

   Contoh: $\sqrt{-3}$ dsb.

4. **Bilangan Kompleks**

   Kuadrat suatu bilangan riil selalu tidak negatif. Oleh karena itu, persamaan $x^2 = -1$ tidak mempunyai penyelesaian dalam bentuk bilangan riil. Para matematikawan memperkenalkan bilangan baru dengan notasi i yang disebut bilangan kompleks yaitu bilangan yang berbentuk $a + bi$ dengan a dan b bilangan riil. Definisi bilangan kompleks $C = \{a + bi | a, b \in R\}$

   Contoh : $1 - 2i = 1 - \sqrt{-1}$ dengan $a = 1$ dan $b = -2$

B. Operasi pada Bilangan Riil

1. **Sifat Operasi Penjumlahan**

   Jika a, b merupakan bilangan riil maka hasil penjumlahan antara a dan b adalah bilangan riil c dan ditulis: $c = a + b$.

   Untuk bilangan riil a, b dan c berlaku sifat-sifat operasi penjumlahan sebagai berikut:

   a. Sifat tertutup

      Penjumlahan dua bilangan riil menghasilkan bilangan riil juga.

   b. Sifat komutatif

      $a + b = b + a$

   c. Sifat asosiatif

      $(a + b) + c = a + (b + c)$

   d. Adanya elemen identitas/netral

$a + 0 = 0 + a = a$, bilangan 0 dinamakan elemen identitas untuk penjumlahan

e. Adanya elemen invers
$a + (-a) = 0$, bilangan $-a$ dikatakan invers penjumlahan dari a.

2. Sifat Operasi Pengurangan

Untuk bilangan riil a, b dan c berlaku sifat-sifat operasi pengurangan ebagai berikut:

a. Sifat tertutup
Pengurangan dua bilangan riil menghasilkan bilangan riil juga.

b. Sifat tidak komutatif
Jika $a \neq b$ maka $a - b \neq b - a$

c. Sifat tidak asosiatif
Jika $c \neq 0$ maka $(a - b) - c \neq a - (b - c)$

3. Sifat Operasi Perkalian

Untuk bilangan riil a, b dan c berlaku sifat-sifat operasi perkalian sebagai berikut:

a. Sifat tertutup
Perkalian dua bilangan riil menghasilkan bilangan riil juga.

b. Sifat komutatif
Jika $a.b = b.a$

c. Sifat asosiatif
Jika $(a.b).c = a.(b.c)$

d. Adanaya elemen identitas/netral
$a \times 1 = 1 \times a = a$, bilangan 1 dinamakan elemen identitas untuk perkalian

e. Adanya elemen invers
$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$, bilangan $\frac{1}{a}$ dikatakan invers perkalian dari a.

4. Sifat Operasi Pembagian

Untuk bilangan riil a, b dan c berlaku sifat-sifat operasi pembagian ebagai berikut:

a. Sifat tertutup

Pembagian dua bilangan riil dengan penyebut tidak nol menghasilkan bilangan riil.

b. Sifat tidak komutatif

Jika $a \neq 0, b \neq 0$ dan $a \neq b$ maka $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$

c. Sifat tidak asosiatif

Jika a, b, c tidak nol, $a \neq b$, dan $c \neq 1$ maka $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} \neq \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$

C. Pertidaksamaan

Pertidaksamaan adalah salah satu bentuk pernyataan matematika yang menagndung satu peubah atau lebih yang dihubungkan oleh tanda-tanda $<, >, \leq$ atau $\geq$. Ditinjau dari jumlah dan pangkat peubah maka pertidaksamaan dapat dibagi menjadi pertidaksamaan linear dengan satu peubah, pertidaksamaan linear dengan peubah banyak dan pertidaksamaan kuadrat.

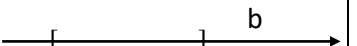
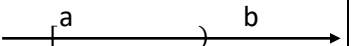
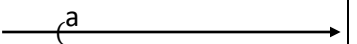
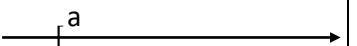
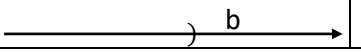
Sifat-sifat pertidaksamaan:

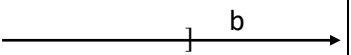
1. Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$
2. Jika $a > b$ maka $a + c > b + c$
3. Jika $a > b$ maka $a - c > b - c$
4. Jika $a > b$ dan c adalah bilangan positif, maka $ac > bc$
5. Jika $a > b$ dan c adalah bilangan negatif, maka $ac < bc$
6. $ac > 0$ jika $a > 0$ dan $c > 0$ atau jika $a < 0$ dan $c < 0$
7. $ac < 0$ jika $a < 0$ dan $c > 0$ atau jika $a > 0$ dan $c < 0$
8. $\frac{a}{c} > 0$ jika $a > 0$ dan $c > 0$ atau jika $a < 0$ dan $c < 0$
9. $\frac{a}{c} < 0$ jika $a < 0$ dan $c > 0$ atau jika $a > 0$ dan $c < 0$
10. Jika $a > b$, maka $-a < -b$

11. Jika $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, maka $a > b$
12. Jika $a < b < c$, maka $b > a$ dan $b < c$ (bentuk komposit)
13. Jika $a > b > c$, maka $b < a$ atau $b > c$ (bentuk komposit)

D. Selang *(interval)*

Selang adalah himpunan bagian dari bilangan riil yang mempunyai sifat relasi tertentu. Jika batas-batasnya merupakan bilangan riil maka dinamakan selang hingga. Jika bukan bilangan riil maka dinamakan selang tak hingga (∞). Lambang ∞ menyatakan membesar tanpa batas dan lambing $-\infty$ menyatakan mengecil tanpa batas. Contoh dari bermacam-macam selang dapat dilihat pada tabel berikut ini.

Notasi	Definisi	Grafik	Keterangan
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$		Selang terbuka
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$		Selang tertutup
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$		Selang setengah terbuka
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$		Selang setengah terbuka
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$		Selang terbuka
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$		Selang tertutup
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$		Selang

			terbuka
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$		Selang tertutup
$(-\infty, \infty)$	R		Selang terbuka

E. Pertidaksamaan Linear Satu Peubah

Pertidaksamaan linear satu peubah adalah pernyataan matematika yang memuat satu peubah yang mempunyai pangkat satu dan dihubungkan dengan tanda-tanda $<, >, \leq$ atau $\geq$. Bentuk umum dari pertidaksamaan linear satu peubah adalah: $ax + b$ (?)0, dengan a dan b adalah konstan, sedangkan (?) adalah salah satu dari tanda-tanda $<, >, \leq$ atau $\geq$.

Contoh: Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidak-samaan!

a. $7x + 9 < -5$
b. $1 + 4x < 2x + 9$
c. $4 < \frac{4-2x}{5} < 2x - 1$

F. Nilai Mutlak

Nilai mutlak dari x dinyatakan dengan $|x|$dan didefinisikan sebagai:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Teorema-teorema

Jika a dan b adalah bilangan riil, maka:

1. $|x| \geq 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $\sqrt{x^2} = |x|$
4. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
5. $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ atau $x < -a$

6. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
7. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ atau $x \leq -a$
8. $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ atau $x = -a$
9. $|x| < |y| = x^2 < y^2$
10. $|ab| = |a||b|$
11. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
12. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (ketidaksamaan segitiga)
13. $|a - b| \leq |a| + |b|$
14. $|a| - |b| \leq |a - b|$

Contoh: selesaikan pertidaksamaan berikut! *(gambarkan garis bilangan dan selangnya)*

a. $|x - 5| \leq 4$
b. $\left|\frac{x+3}{x-4}\right| < 2$

Latihan Soal

1. Nyatakan bilangan desimal berikut dalam bentuk pecahan
   a. 0,666…
   b. 2,5656…
   d. 0,02727…
   e. 0,1818…
   f. 0,0222…
   g. 0,0555…
   h. 0,549549…
   i. 0,03636…
2. Selesaikan pertidaksamaan berikut:
   a. $5x + 6 \geq 3x - 9$
   b. $\frac{1}{2} + 5x < \frac{3}{5} - 6x$
   c. $\frac{1}{3}(7x - 3) < x + 1$
   d. $\frac{1-2x}{3} > \frac{2x+x}{5}$
   e. $6 \geq \frac{2-x}{9} \geq \frac{1}{6}$
   f. $\frac{1}{5} > \frac{3-2x}{7} > \frac{1}{6}$
   g. $\frac{x-3}{x^2-8x+7} > 0$
   h. $\frac{5}{x-7} > \frac{7}{x+5}$
3. Selesaikan pertidaksamaan harga mutlak berikut:

a. $|x + 8| < 2$
b. $|6 - 2x| \geq 7$
c. $\left|\frac{4x-5}{3}\right| > 6$
d. $\left|\frac{7+6x}{4}\right| \leq 3$
e. $\left|\frac{6x-1}{x+5}\right| \leq 3$
f. $|2x + 1| < |2x - 3|$

BAB III
HIMPUNAN

A. Konsep Himpunan

Himpunan adalah suatu kumpulan atau koleksi dari objek-objek yang terdefinisi dengan jelas *(well defined).* Objek-objek dari himpunan yang dimaksud adalah suatu objek yang dapat ditentukan dengan pasti termasuk dalam himpunan tersebut atau tidak. Terdefinisi dengan jelas artinya bahwa himpunan tersebut memiliki sifat-sifat dan syarat tertentu sebagai ciri pembeda yang menentukan keanggotaan suatu himpunan. Objek yang terdapat dalam himpunan disebut *elemen, unsur* atau *anggota*. Apakah kalimat-kalimat berikut termasuk himpunan?

1. Kumpulan mahasiswa pandai
2. Kumpulan bilangan prima

Kata-kata yang merupakan sinonim dengan himpunan seperti gugus, kumpulan, kelas, koleksi, keluarga.

Pada umumnya himpunan disimbolkan dengan huruf kapital, seperti A, B, C dan elemen-elemen dari himpunan disimbolkan dengan huruf alfabet kecil seperti a, b, c. notasi a ∈ A dibaca “a ialah elemen/anggota dari A”. dan "a ∉ A" dibaca “a bukan elemen/anggota dari A”.

Himpunan mungkin saja beranggotakan himpunan lagi. Himpunan seperti ini biasanya disebut koleksi dari himpunan-himpunan. Misalnya himpunan dari tim-tim sepak bola di Indonesia merupakan himpunan yang anggota-anggotanya adalah tim-tim kesebelasan sepakbola yang ada di Indonesia. Tentu saja pemain dari suatu tim kesebelasan bukan menjadi anggota dari koleksi himpunan tersebut.

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A

Contoh: Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$, $K = \{\{\}\}$

maka:

- $3 \in A$
- $\{a, b, c\} \in R$
- $c \notin R$
- $\{\} \in K$

B. Penyajian Himpunan

Terdapat banyak cara untuk menyajikan himpunan. Disini akan dikemukakan 4 cara penyajian, yaitu:

1. Menyatakan sifat yang dimiliki anggotanya

   Contoh:

   a. Himpunan bilangan asli kurang dari 6
   b. Himpunan bilangan prima kurang dari 13
   c. Himpunan bilangan ganjil kurang dari 11

2. Bentuk pendaftaran *(Tabular-Form)*

   Bentuk pendaftaran *(Tabular-Form)* yaitu dengan menuliskan semua elemen himpunan tersebut di dalam kurung kurawal. Dari contoh nomor 1 menjadi :

   a. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   b. $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
   c. $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
   d. $C = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$
   e. $R = \{ a, b, \{a, b, \text{c}\}, \{a, c\} \}$
   f. $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
   g. $K = \{ \{\} \}$
   h. Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: {1, 2, ..., 100 }
   i. Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}

3. Bentuk pencirian *(Set-Builder Form)*

   Bentuk pencirian *(Set-Builder Form)* yaitu dengan menuliskan sifat/ketentuan mengenai elemen himpuna tersebut.

   Notasi : { x | syarat yang harus dipenuhi x }

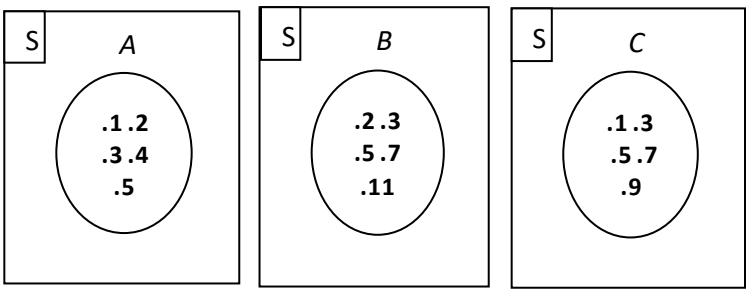
   Dari contoh nomor 1 jika diubah dalam bentuk pencirian menjadi:

   a. $P = \{x | 0 < x < 6, x \in \text{bilangan asli}\}$
   b. $Q = \{x | 0 < x < 13, x \in \text{bilangan prima}\}$
   c. $R = \{x | 0 < x < 11, x \in \text{bilangan ganjil}\}$

4. Diagram Venn

   Diagram Venn menyajikan himpunan secara grafis. Di dalam diagram venn, himpunan semesta (S) digambarkan sebagai suatu segi empat sedangkan

himpunan lainnya digambarkan sebagai lingkaran di dalam segi empat tersebut. Dari contoh nomor 1 jika diubah dalam bentuk diagram venn menjadi:



Penulisan anggota dalam suatu himpunan hanya sekali saja. Jadi tidak boleh menuliskan himpunan dengan $\{1, 2, 3, 1, 4\}$. Jumlah anggota dalam himpunan A disebut **kardinal** dari himpunan A, dengan notasi $n(A)$ atau $|A|$.

Contoh :

a. $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima lebih kecil dari 20 $\}$, atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$
b. $T = \{$kucing, a, Amir, 10, paku$\}$, maka $|T| = 5$
c. $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, maka $|A| = 3$

C. Jenis Himpunan

Ada beberapa jenis himpunan, yaitu:

1. Himpunan Berhingga

Himpunan berhingga yaitu himpunan yang jumlah elemennya terbatas.

Contoh:

a. Himpunan ibukota propinsi di pulau jawa
b. Himpunan bilangan asli kurang dari 7

c. Himpunan manusia yang hidup di bumi

2. Himpunan Tak Berhingga

Himpunan tak berhingga yaitu himpunan yang jumlah elemennya tak terbatas. Contoh:

a. $A = \{x | x$ bilangan ganjil$\}$
b. $B = \{x | x$ bilangan asli$\}$

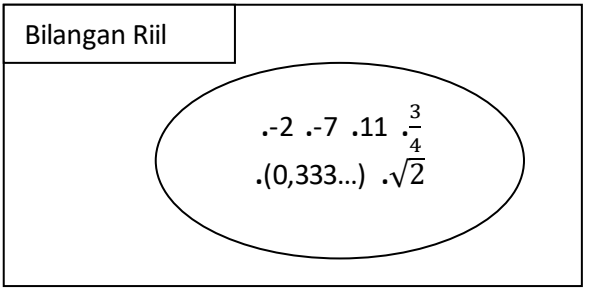
3. Himpunan Kosong

Himpunan kosong yaitu himpunan yang tidak mempunyai elemen. Notasi untuk himpunan kosong adalah { } atau ∅. Himpunan dengan kardinal $= 0$ disebut himpunan kosong (*null set*).

a. $C = \{$pemain sepakbola Indonesia yang bermain di FC Barcelona$\}$
b. $D = \{x | x^2 = 9, x \in$ bilangan genap$\}$ atau $D = \emptyset$ karena $n(A) = 0$
c. (i) $E = \{ x | x < x \}$, maka $n(E) = 0$
   (ii) $P = \{$orang Indonesia yang pernah ke bulan$\}$, maka $n(P) = 0$
   (iii) $A = \{x | x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$
d. Himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai {∅}
e. Himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai {∅, {∅}}
f. {∅} bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

4. **Himpunan Semesta *(universal)***

Himpunan S atau U disebut himpunan semesta jika S atau U mengandung semua elemen yang sedang dibicarakan/diperhatikan. Contoh jika kita membahas bilangan-bilangan: $-2, -7, 11, \frac{3}{4}, (0{,}333\ldots), \sqrt{2}$ maka himpunan semestanya adalah himpunan bilangan riil. Jika disajikan dalam diagram venn maka menjadi:



D. Hubungan Antar Himpunan

Ada beberapa macam hubungan antar himpunan, yaitu:

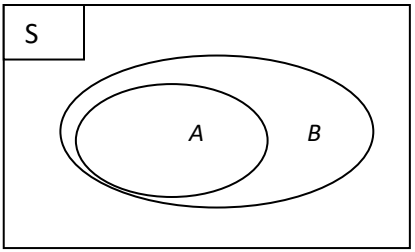
1. **Himpunan Bagian *(Subset)***

Himpunan A dikatakan himpunan bagian *(subset)* dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B. Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.

Notasi: Subset $(A \subseteq B)$. Superset $(B \supseteq A)$. Subset sejati $(A \subset B)$. Superset sejati $(B \supset A)$

a. Subset/superset jika dan hanya jika $\forall x(x \in A \Longrightarrow x \in B)$.
b. Subset sejati/superset sejati jika dan hanya jika $\forall x(x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge \exists y(y \in B \wedge y \notin A)$
c. Himpunan kosong $(\emptyset)$ merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan.

Himpunan bagian jika digambarkan dengan diagram venn menjadi:



Contoh:

a. Diberikan himpunan $A = \{2x | x \in A\}$ dan $B = \{x | x \in$ bilangan asli genap$\}$. Karena semua anggota himpunan A sama dengan anggota himpunan B maka A subset dari B atau ditulis $A \subseteq B$.
b. Diberikan himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{a, b, c\}$. Karena semua anggota himpunan B juga merupakan anggota himpunan A maka B subset sejati dari A atau ditulis $B \subset A$.
c. Diberikan himpunan $A = \{a, b, c\}$. Buatlah himpunan bagian yang mungkin dari himpunan A tersebut! Jawab: $\{\ \}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

2. Himpunan Lepas *(Disjoint)*

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas jika keduanya tidak memiliki elelmen yang sama.

Notasi: $A \supset\subset B$ atau $A//B$.

Contoh:

$A = \{2x | x \in A\}$ $B = \{x | x \in$ bilangan asli yang ganjil$\}$

Maka: $A//B$

3. **Himpunan Tak Lepas *(Joint)***

Dua himpunan A dan B dikatakan saling tak lepas jika ada elemen di himpunan A merupakan elemen di himpunan B.

Notasi: $A \between B$

Contoh:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$

Maka: $A \between B$

4. **Himpunan Kuasa *(Power set)***

Himpunan kuasa *(power set)* dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

Notasi: $P(A)$ atau 2^A

Contoh:

Diberikan himpunan $A = \{a, b, c\}$. Himpunan bagian yang mungkin dari himpunan A adalah: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Maka himpunan kuasa dari himpunan A adalah

$P(A) = \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

$n(P(A)) = 2^3 = 8$

Berapa banyak himpunan bagian jika himpunan $= \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ ***?***

5. **Diagram Garis**

Diagram garis merupakan diagram yang menyatakan suatu himpunan yang merupakan himpunan bagian dari himpunan lainnya. Jika terdapat $A \subset B$ berarti himpunan B berada pada kedudukan yang lebih tinggi dari himpunan A, maka digambarkan sebagai berikut:

Contoh:

Buatlah diagram garis pada himpunan-himpunan berikut!

$S = \{x | x \in B\}$

$A = \{2x | x \in A\}$

$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$B = \{x | x \in$ bilangan asli yang genap$\}$

$D = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$

E. Kesamaan Himpunan

Ada dua jenis kesamaan himpunan, yaitu:

1. Himpunan Sama

Himpunan A dikatakan sama dengan himpunan B jika dan hanya jika keduanya mempunyai elemen yang sama. Dengan kata lain A sama dengan B jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A.

Notasi: $\{A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A\}$

Contoh:

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad\quad$ $C = \{3, 3, 1, 2, 1\}$

$B = \{2, 1, 3\}$ $\quad\quad$ $D = \{3, 7\}$

Maka: $A = B, A = C, B = C, A \neq D$

2. **Himpunan Ekivalen**

Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

Notasi: $A \sim B \Leftrightarrow n(A) = n(B)$

Contoh: Jika $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$, maka $A \sim B$ sebab $n(A) = n(B) = 4$

F. Operasi Terhadap Himpunan

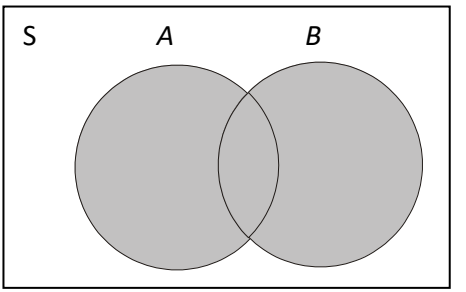
Jenis operasi yang lazim digunakan terhadap himpunan adalah operasi gabungan *(union),* irisan *(intersection),* komplemen *(complement*), selisih *(difference),* beda stangkup (symmetric *difference)* dan perkalian kartesian *(cartesian product).*

1. **Gabungan *(union)***

Gabungan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau himpunan B.

Notasi: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$

Diagram venn untuk $A \cup B$ adalah



Contoh: Jika $A = \{2, 5, 8\}$ dan $B = \{7, 5, 22\}$ maka $A \cup B = \{2, 5, 7, 8, 22\}$

Catatan :

a. $A \cup B = B \cup A$

b. $A \subset (A \cup B)$; $B \subset (A \cup B)$

c. Bila $A \subset B$ maka $A \cup B = B$

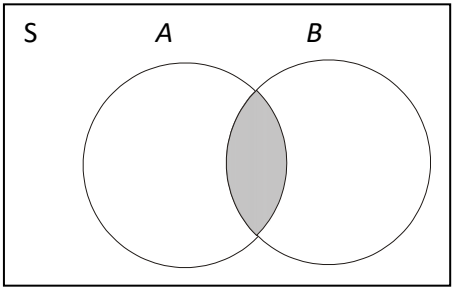
d. $A \cup \emptyset = A, A \cup S = S$

2. Irisan *(intersection)*

Irisan dari himpunan A dan B adalah sebuah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan A dan himpunan B.

Notasi: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$

Diagram venn untuk $A \cap B$ adalah



Contoh:

a. Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$ maka $A \cap B = \{4, 10\}$

b. Jika $A = \{3, 5, 9\}$ dan $B = \{4, 10\}$ maka $A \cap B = \{\}$

Catatan :

a. $A \cap B = B \cap A$

b. $(A \cap B) \subset A$; $(A \cap B) \subset B$

c. Bila $A \subset B$ maka $A \cap B = A$

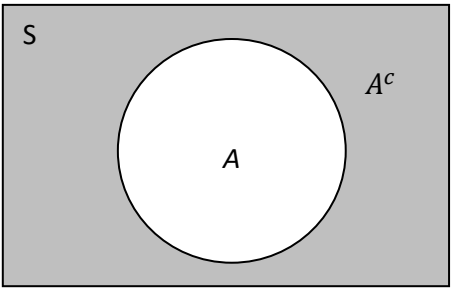
d. $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap S = A$

3. Komplemen *(complement)*

Komplemen dari suatu himpunan A terhadap suatu himpunan semesta S adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen Syang bukan elemen A.

Notasi: $A^c = \{x | x \in S \text{ dan } x \notin A\}$

Diagram venn untuk A^c adalah



Contoh: Misalkan $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Jika $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ maka $A^c = \{2, 4, 6, 8\}$

Catatan :

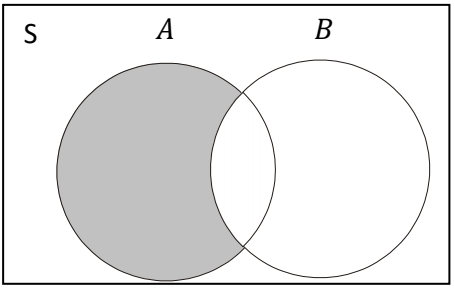
a. $A \cap A^c = \emptyset$
b. $A \cup A^c = S$
c. $S^c = \emptyset, \emptyset^c = S$
d. $(A^c)^c = A$
e. $A - B^c = A \cap B$ (A dan B tidak saling lepas)
f. Bila $A \subset B$ maka $A^c \subset B$

4. Selisih *(difference)*

Selisih dari dua himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen dari A tetapi bukan elemen dari B.

Notasi: $A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\}$

Diagram venn untuk $A - B$ adalah



Contoh:

a. Misalkan $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ maka $A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
b. $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$
c. $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

Catatan :

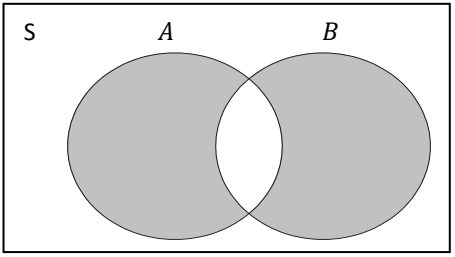
a. $(A - B) \subset A$
b. $A - B \neq B - A$, bila $A \neq B$
c. Bila $A \subset B$ maka $A - B = \emptyset$ dan $(B - A) \subset B$

5. Beda Stangkup (*symmetric difference*)

Beda setangkup dari himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya ada pada himpunan A atau B, tetapi tidak pada keduanya.

Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Diagram venn untuk $A \oplus B$ adalah



Contoh:

Jika $A = \{2, 4, 6\}$ dan $B = \{2,3, 5\}$ maka $A \oplus B = \{3, 4, 5, 6\}$

Catatan:

a. $A \oplus B = B \oplus A$

b. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

6. **Perkalian Kartesian** ***(cartesian product)***

Perkalian kartesian dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan berurutan yang dibentuk dari komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B.

Notasi: $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh:

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$

maka $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$B \times A = \cdots ?$

Catatan :

a. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A||B|$

b. Pasangan berurutan (a,b) berbeda dengan (b,a) dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$

c. Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ degan syarat A atau B tidak kosong.

d. Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$, maka $A \times B = B \times A = \emptyset$

G. Hukum-hukum Aljabar Himpunan

1. Identitas
   a. $A \cup \emptyset = A$
   b. $A \cap S = A$
2. Idempoten
6. Penyerapan (absorpsi)
   a. $A \cup (A \cap B) = A$
   b. $A \cap (A \cup B) = A$
7. Involusi

a. $A \cup A = A$
b. $A \cap A = A$

3. Komutatif
   a. $A \cup B = B \cup A$
   b. $A \cap B = B \cap A$
4. Asosiatif
   a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5. Distributif
   a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$(A^c)^c = A$

8. Hukum dominasi
   a. $A \cap \emptyset = \emptyset$
   b. $A \cup S = S$
9. Komplemen
   a. $A \cup A^c = S$
   b. $A \cap A^c = \emptyset$
   c. $S^c = \emptyset$
   d. $\emptyset^c = S$
10. Dalil De Morgan
    a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
    b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

H. Pembuktian Kalimat Himpunan

Terdapat beberapa metode untuk membuktikan kebenaran proposisi himpunan diantaranya:

1. Pembuktian Dengan Menggunakan Definisi

Untuk membuktikan kesamaan himpunan, misalnya $A = B$ maka harus dibuktikan dengan dua arah sesuai dengan definisinya, yaitu: $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Contoh 1: Buktikan Dalil De Morgan berikut $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Bukti!

Pertama, akan ditunjukkan bahwa $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$

a. Ambil sebarang $x \in (A \cup B)^c$
b. $x \in (A \cup B)^c \rightarrow x \notin (A \cup B)$
c. Artinya $x \notin A$ dan $x \notin B$
d. Jadi $x \in A^c$ dan $x \in B^c$, berarti $x \in A^c \cap B^c$
e. Dapat ditunjukkan bahwa $x \in (A \cup B)^c \rightarrow x \in A^c \cap B^c$

f. Maka: $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$

Kedua, akan ditunjukkan bahwa $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$

a. Ambil sebarang $x \in A^c \cap B^c$
b. $x \in A^c \cap B^c \rightarrow x \in A^c$ dan $x \in B^c$
c. Karena itu $x \notin A$ dan $x \notin B$, yang berarti $x \notin (A \cup B)$
d. Jadi $x \in (A \cup B)^c$
e. Dapat ditunjukkan bahwa $x \in A^c \cap B^c \rightarrow x \in (A \cup B)^c$
f. Maka: $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$

Dari pembuktian di atas diperoleh bahwa $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ dan $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$ sehingga dapat disimpulkan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *(terbukti).*

Contoh 2: Misalkan A dan B himpunan. Buktikan jika $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$.

Penyelesaian:

a. Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika $x \in P$ juga $x \in Q$. Misalkan $x \in A$ karena $A \subset (B \cup C)$ maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup C)$. Dari definisi operasi gabungan, $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.
b. Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \emptyset$ maka $x \notin B$

Dari (a) dan (b), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall x \in A$ juga berlaku $x \in C$ maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$. *(terbukti)*

2. Pembuktian Dengan Menggunakan Aljabar Himpunan

Contoh: buktikan hukum penyerapan berikut:

a. $A \cup (A \cap B) = A$
b. $A \cap (A \cup B) = A$

Bukti:

a. $A \cup (A \cap B) =$ Hukum identitas
$(A \cap S) \cup (A \cap B)$ Hukum distributif
$= A \cap (S \cup B)$ Hukum dominasi
$= A \cap S$ Hukum identitas
$= A$

b. $A \cap (A \cup B) =$ Hukum identitas
$(A \cup \emptyset) \cap (A \cup B)$ Hukum distributif
$= A \cup (\emptyset \cap B)$ Hukum dominasi
$= A \cup \emptyset$ Hukum identitas
$= A$

3. Pembuktian Dengan Menggunakan Tabel Keanggotaan

Kesamaan himpunan juga bisa dibuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan. Menggunakan angka 1 untuk menyatakan bahwa suatu elemen adalah anggota himpunan, dan 0 untuk menyatakan bukan anggota himpunan. Analogi: 1 = Benar dan 0 = Salah.

Contoh: Buktikan Dalil De Morgan berikut $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Bukti!

A	B	A^c	B^c	$(A \cup B)$	$(A \cup B)^c$	$A^c \cap B^c$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

sama

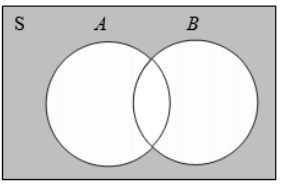
Dari hasil tabel di atas, diperoleh pada kolom $(A \cup B)^c$ dan kolom $A^c \cap B^c$ memiliki nilai keanggotaan yang sama untuk semua kasus maka dapat terbukti bahwa $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

4. Pembuktian Dengan Menggunakan Diagram Venn

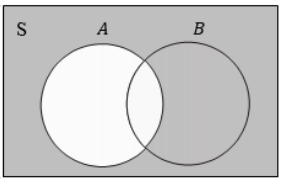
Membuktikan dengan diaram venn caranya dengan membuat diagram venn untuk pernyataan di sebelah kiri dan kemudian pernyataan untuk yang sebelah kanan, jika ternyata diagram ven keduannya sama berarti kesamaan tersebut benar.

Contoh: Buktikan Dalil De Morgan berikut $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

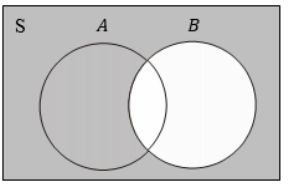
Bukti!



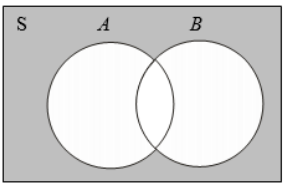
(a). $(A \cup B)^c$



(b). A^c



(c). B^c



(d). $A^c \cap B^c$

Dari gambar diagram venn di atas terlihat bahwa $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *(terbukti).*

I. Implementasi Himpunan

Jika A suatu himpunan hingga, artinya A mempunyai anggota tepat sebanyak misalnya m anggota, kita dapat menyatakan banyaknya anggota A sebagai $n(A)$. Berikut ini beberapa sifat yang berkaitan dengan banyaknya anggota himpunan, sebagai berikut:

1. Jika A dan B himpunan hingga yang saling lepas ($A \cap B = \emptyset$), maka:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

2. Jika A dan B sembarang himpunan hingga yang beririsan, dan $A \cup B$ hingga, demikian pula $A \cap B$ maka:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

3. Sifat yang kedua dapat diperluas untuk sembarang 3 himpunan hingga A, B dan C yang saling beririsan, yaitu:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B$$

4. Terdapat beberapa rumus umum yang lain diantranya:
   a. $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = n(A - B^c)$
   b. $n(A \oplus B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$
   c. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A \cap B^c)$
   d. $n(S) = n(A) + n(A^c)$
   e. $n(S) = n(A \cup B) + n(A \cup B)^c = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cup B)^c$

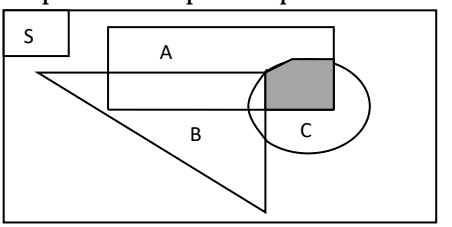
Contoh:

1. Dari 65 mahasiswa diketahui terdapat 24 mahasiswa yang hobi dengan olahraga tenis meja, 35 mahasiswa hobi olahraga sepakbola dan 6 mahasiswa suka keduanya. Berapa mahasiswa yang tidak hobi olahraga tenis meja maupun sepakbola?
2. Dari 120 mahasiswa semester ganjil jurusan pendidikan matematika, 100 mahasiswa mengambil paling sedikit satu kegiatan kemahasiswaan, yaitu olah raga, pecinta alam dan paduan suara. Diketahui bahwa:
   65 mahasiswa mengikuti kegiatan olahraga
   45 mahasiswa mengikuti kegiatan pecinta alam
   42 mahasiswa mengikuti kegiatan paduan suara
   20 mahasiswa mengikuti sekaligus kegiatan olah raga dan pecinta alam
   25 mahasiswa mengikuti sekaligus kegiatan olah raga dan paduan suara
   15 mahasiswa mengikuti kegiatan pecinta alam dan padaun suara
   Berapa mahasiswa yang mengambil sekaligus 3 kegiatan mahasiswa tersebut?

Latihan Soal

1. Himpunan-himpunan berikut ini, manakah yang objek-objeknya didefinisikan dengan jelas?
   a. Himpunan 10 wanita tercantik
   b. Himpunan nama mahasiswa yang di lahirkan di bulan Mei
   c. Himpunan tujuh universitas terbesar
2. Buatlah himpunan bentuk *set-builder form* berikut ke dalam bentuk *tabular form*!
   a. $A = \{x | x^2 = 1, x \in \text{bilangan bulat}\}$
   b. $B = \{x | x^2 < 100, x \in \text{bilangan asli}\}$
   c. $C = \{x | x = 2n - 1, n \in \text{bilangan asli}\}$
3. Buatlah himpunan bentuk *tabular form* berikut ke dalam bentuk *set-builder form*!
   a. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
   b. $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
   c. $C = \{13, 17, 19, 23, \dots\}$
   d. $D = \{0, 4, 8, 12, \dots\}$
   e. $E = \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 12, -12, \dots\}$
4. Tentukan himpunan yang berhingga dan tak berhingga dari himpunan dibawah ini!
   a. A adalah himpunan mahasiswa tahun 2012
   b. $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
   c. C himpunan bilangan anatar 10 dan 1000 yang habis dibagi 7
5. Jika diketahui $= \{2, 4, 6\}, B = \{2, 6\}, C = \{4, 6\}$ dan $D = \{4, 6, 8\}$. Tunjukkan himpunan yang merupakan subset dari himpunan lainnya, dan buatlah diagram garisnya!

6. Benar atau salahkah pernyataan-pernyataan berikut ini! Jika salah betulkanlah!
   a. Jika $A \subset B$ dan $B \subset C$, maka $A \subset C$
   b. Jika $a \in A$ dan $A \in B$ maka $a \subset B$
7. Gambarlah diagram venn untuk 3 himpunan A, B, C yang tidak hampa sedemikian hingga:
   a. $A \subset B, C \subset B, A \cap C = \phi$
   b. $A \subset B, C \not\subset B, A \cap C \neq \phi$
   c. $A \subset C, A \neq C$, B $\cap C = \phi$
   d. $A \subset (B \cap C), B \subset C, C \neq B, A \neq C$
8. Pada himpunan semesta $S = \{x^2 | x^2 < 50, x \in$ bilangan bulat $\}$ terdapat himpunan $A = \{x | x < 30\}$, $B = \{x | x$ adalah bilangan ganjil$\}$ dan $C = \{x | x$ adalah kelipatan 4$\}$. Tentukan elemen-elemen himpunan dan buatlah diagram Venn dari operasi-operasi himpunan berikut:
   a. $B \cup A$
   b. $A^c \cup C$
   c. $(A \cap C)^c$
   d. $A - C^c$
   e. $B^c - C^c$
   f. $A \oplus B$
   g. $(A \oplus B^c)^c$
   h. $A \oplus A^c$
9. Perhatikan gambar disamping!
   Nyatakan operasi himpunan pada daerah yang diarsir



10. Diketahui:
    A = himpunan mahasiswa UIN Jakarta
    B = himpunan mahasiswa yang tinggal di asrama
    C = himpunan mahasiswa angkatan 2014
    D = himpunan mahasiswa yang mengambil Pengantar Dasar Matematika (PDM)
    E = himpunan mahasiswa yang membawa motor untuk pergi ke kampus
    Nyatakan dalam notasi operasi himpunan sebagai berikut:
    a. Semua mahasiswa UIN Jakarta angkatan 2014 yang membawa motor untuk pergi ke kampus
    b. Semua mahasiswa angkatan 2014 yang tinggal di asrama dan tidak mengambil PDM
    c. Semua mahasiswa angkatan 2014 yang tidak tinggal di asrama atau tidak membawa motor untuk pergi ke kampus
11. Diberikan himpunan $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b,c\}$ dan $C = \{c,d\}$. Tentukanlah:
    a. $A \times (B \cup C)$
    b. $(A \times B) \cup (A \times C)$
    c. $(C - B)^4$
12. Buktikan
    a. $A \cap (A \cup B) = A$ → gunakan bukti dengan definisi
    b. $A \subset B$ jika dan hanya jika $A \cup B = B$ → gunakan bukti dengan definisi
    c. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ → gunakan bukti dengan tabel keanggotaan
    d. $A \cup (A \cup B)^c = A \cup B^c$ → gunakan bukti dengan tabel keanggotaan

e. $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B \rightarrow$ gunakan bukti dengan aljabar himpunan

f. $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B \rightarrow$ gunakan bukti dengan aljabar himpunan

13. Misalkan n(A) banyaknya anggota himpunan A. jika n (A – B) $= 3x + 60, n(A \cap B) = x^2, n(B - A) = 5x$ dan $n(A \cup B) = 300$. Maka tentukan n (A)
14. Pada suatu kelas yang terdiri dari 50 siswa, hanya 25 siswa yang menyukai paling sedikit satu mata pelajaran matematika atau fisika. Ternyata ada 16 siswa yang menyukai pelajaran matematika dan 13 siswa yang menyukai pelajaran fisika. Tentukan banyaknya siswa yang menyukai kedua mata pelajaran tersebut!
15. Dalam suatu survey pada 60 orang tentang kebiasaannya membaca media massa, didapat data bahwa 25 orang membaca majalah (M), 26 membaca Tabloid (T) dan 26 membaca Koran harian (K). terdapat 9 orang membaca majalah dan Koran, 11 membaca majalah dan tabloid, 8 membaca tabloid dan Koran, dan 8 orang tidak membaca satu media massapun.

a. Tentukan jumlah orang yang membaca ketiga media massa tersebut!
b. Buatlah diagram venn dan isilah jumlah orang yang tepat pada setiap daerah diagram venn tersebut!
c. Tentukan jumlah orang yang hanya membaca satu media massa!

16. Berapa banyak bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5 ?

17. Diantara bilangan bulat antara 101 – 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya ?
18. Sebanyak 1232 orang mahasiswa mengambil kuliah bahasa inggris, 879 orang mengambil kuliah bahasa prancis, dan 114 mengambil kuliah bahasa jerman. Sebanyak 103 orang mengambil kuliah bahasa inggris dan prancis, 23 orang mengambil kuliah bahasa inggris dan jerman, dan 14 orang mengambil kuliah bahasa prancis dan bahasa jerman. Jika 2092 orang mengambil paling sedikit satu buah kuliah bahasa inggris, bahasa prancis dan bahasa jerman, berapa banyak mahasiswa yang mengambil kuliah ketiga bahasa tersebut ?

BAB IV
INDUKSI MATEMATIKA

Induksi Matematika m eru pakan suatu teknik yang dikembangkan untuk membuktikan pernyataan. Ind uksi Matematika digunakan untuk mengecek hasil proses yang terjadi secara berulang sesuai dengan pola tertentu. Indukasi Matematika digunakan untuk membukti-kan universal statements $\forall$ n $\in$ A S(n) dengan A $\subset$ N dan N adalah himpunan bilangan positif atau himpunan bilangan asli. S(n) adalah fungsi propositional.

A. Tahapan Induksi Matematika

1. Basis Step: Tunjukkan bahwa S(1) benar
2. Inductive Step: Sumsikan S(k) benar
   Akan dibuktikan S(k) $\rightarrow$ S(k+1) benar
3. Conclusion: S(n) adalah benar untuk setiap n bilangan integer Positif

B. Pembuktian Induksi Matematika

Contoh 1:

Buktikan bahwa:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$

Untuk setiap n bilangan integer positif

Jawab:

- Basis: Untuk n = 1 akan diperoleh:
  $1 = ½\ 1.\ (1+1) \rightarrow 1 = 1$
- Induksi: misalkan untuk n = k asumsikan $1 + 2 + 3 + \ldots + k = ½\ k\ (k+1)$
- adib. Untuk n = k+1 berlaku
  $1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = ½\ (k+1)\ (k+2)$
- $1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = (k+1)\ (k+2) / 2$
  $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = (k+1)\ (k+2) / 2$

  $k\ (k+1) / 2 + (k+1) = (k+1)\ (k+2) / 2$
  $(k+1)\ [\ k/2 + 1] = (k+1)\ (k+2) / 2$
  $(k+1)\ ½\ (k+2) = (k+1)\ (k+2) / 2$
  $(k+1)\ (k+2) / 2 = (k+1)\ (k+2) / 2$
- Kesimpulan: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = ½\ n\ (n+1)$
  Untuk setiap bilanga bulat positif n

Contoh 2:

Buktikan bahwa:

$1 + 3 + 5 + \ldots + n = (2n - 1) = n^2$

untuk setiap n bilangan bulat positif

Jawab:

- Basis: Untuk n = 1 akan diperoleh:
  $1 = 1^2 \rightarrow 1 = 1$
- Induksi: misalkan untuk n = k asumsikan $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$
- adib. Untuk n = k + 1 berlaku
  $1 + 3 + 5 + \ldots + (2\ (k + 1) - 1) = (k + 1)^2$
  $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2$
  $1 + 3 + 5 + \ldots + ((2k + 1) - 2) + (2k + 1) = (k + 1)^2$

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$

$k^2 + (2K + 1) = (k + 1)^2$

$k^2 + 2K + 1 = k^2 + 2K + 1$

Kesimpulan: $1 + 3 + 5 + \ldots + n = (2n - 1) = n^2$

Untuk setiap bilangan bulat positif n

Contoh 3:

Buktikan bahwa:

$N^3 + 2n$ adalah kelipatan 3, untuk setiap n bilangan bulat positif

Jawab:

- Basis: Untuk $n = 1$ akan diperoleh:
  $1 = 1^3 + 2(1) \rightarrow 1 = 3$, kelipatan 3
- Induksi: misalkan untuk $n = k$ asumsikan $k^3 + 2k = 3x$
- adib. Untuk $n = k + 1$ berlaku
  $(k + 1)^3 + 2(k + 1)$ adalah kelipatan 3
  $(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 2k + 2$
  $(k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3)$
  $(k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)$
  ↓ Induksi
  $3x + 3(k^2 + k + 1)$
  $3(x + k^2 + k + 1)$

Kesimpulan : $N^3 + 2n$ adalah kelipatan 3

Untuk setiap bilangan bulat positif n

Latihan Soal

1. Diberikan P(n) ≡ $n^3 + 5n$. Tunjukkan P(n) habis dibagi 6, untuk semua n ∈ N.
2. Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan pernyataan berikut adalah benar! $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$, untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$
3. Tentukan bilangan bulat pertama $\boldsymbol{N}$ sehingga pernyataan berikut benar untuk semua $n \geq \boldsymbol{N}$ dan kemudian buktikanlah pernyataan tersebut.
   a. $3n + 25 < 3^n$
   b. $n^2 \leq 2^n$
4. Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan pernyataan berikut adalah benar!
   a. $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ habis dibagi 133, untuk $\forall n \in \boldsymbol{P}$
   b. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$, untuk $\forall n \in \boldsymbol{P}$
   c. $1.1! + 2.2! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$, untuk $\forall n \geq 0$

BAB V
RELASI DAN FUNGSI

A. Relasi

1. Definisi Relasi

Untuk mendefinisikan relasi R diperlukan 3 (tiga) hal, yaitu:

1. Suatu himpunan A
2. Suatu himpunan B
3. Suatu aturan atau kalimat matematika terbuka

Misalnya:

1. Himpunan tiga orang mahasiswa: A = {Ahmad, Budi, Siti)
2. Himpunan nomor sepatu: B = {37, 38, 39, 40, 41}

Diketahui bahwa:

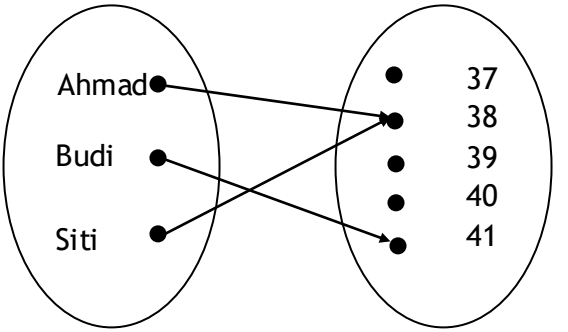
Ahmad memakai sepatu nomor 38

Budi memakai sepatu nomor 41

Siti memakai sepatu nomor 38

Dari keterangan di atas dapat kita tentukan suatu relasi dari himpunan mahasiswa (A) ke himpunan nomor sepatu (B) yang relasinya disebut **"Memakai sepatu nomor"**.

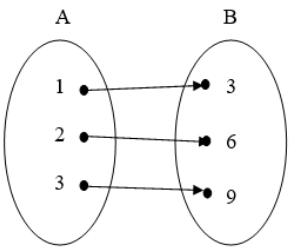
Bila relasi di atas dinyatakan dalam bentuk diagram panah maka dapat dilihat sebagai berikut:



Relasi di atas dapat juga dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut, misalnya: "Ahmad memakai sepatu nomor 38" cukup ditulis dengan singkat (Ahmad, 38). Demikian pula untuk yang lainnya. Jadi relasi tersebut bila dituliskan dalan bentuk pasangan terurut adalah:
R = {(Ahmad, 38), (Budi, 41), (Siti, 38).

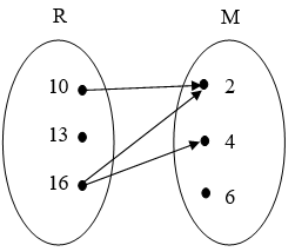
Definisi
Relasi R dengan suatu kalimat terbuka dari himpunan A ke himpunan B adalah sebuah himpunan yang anggota-anggotanya semua pasangan terurut (x,y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$ sedemikian sehingga kalimat terbukanya menjadi bernilai benar.

Contoh:
Tentukan relasi yang mungkin dari gambar diagram panah berikut:



Gambar 1

.....



Gambar 2

.....

Perlu diketahui bahwa jika $(a, b) \in R$ artinya a R b dan dibaca "a berelasi dengan b oleh R", sedangkan jika $(x, y) \notin R$ artinya x R y dan dibaca "x tidak berelasi dengan y oleh R". Dari contoh di atas jelas bahwa:

$(1,3) \in R$ berarti 1 R 3

$(2,6) \in R$ berarti 2 R 6

$(1,6) \in R$ berarti $1 \not R$ 3 dan sebagainya

Himpunan A dan R dari contoh di atas dinamakan daerah asal *(domain)*, kemudian himpunan B dan M dinamakan daerah kawan *(kodomain)*. Daerah hasil *(range)* dari contoh gambar 1 adalah $(3, 6, 9)$ sedangkan *range* dari contoh gambar 2 adalah $(2, 4)$.

Contoh:

Jika $A = \{3, 4, 6\}$ dan $B = \{2, 3, 5, 6\}$ dan aturan dari relasi R yang memasangkan anggota-anggota A ke anggota-anggota B adalah "lebih besar dari". Nyatakan relasi R tersebut dalam berbagai cara yaitu *diagram panah, pasangan terurut* dan *diagram koordinat.*

Jika kita perhatikan relasi R dari A ke B, kemudian kita bandingkan dengan perkalian kartesian *(cartesian product)* dari A ke B maka jelas bahwa relasi R itu

merupakan **himpunan bagian** dari $A \times B$. Secara umum pernyataan ini dikenal sebagai definisi dari relasi yang lebih popular.

Definisi
Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu himpunan bagian dari A×B atau dapat ditulis R⊂A×B, dengan A×B={(a,b)|a∈A dan b∈B}.

Contoh 1:
Diketahui $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Tentukan banyaknya unsur dalam himpunan $R = \{(x, y)|(x, y) \in A \times B \wedge x < y\}$
Setiap relasi R dari himpunan A ke himpunan B yang didefinisikan $R = \{(x, y)|x \in A, y \in B$, kalimat terbuka $p(x, y)$ benar} selalu mempunyai relasi invers R^{-1} dari himpunan B ke himpunan A yang didefinisikan $R^{-1} = \{(y, x)|(x, y) \in R\}$, sehingga dapat dikatakan bahwa R^{-1} adalah *himpunan semua pasangan terurut yang bersifat bahwa jika urutan elemen dalam pasangan itu ditukar maka pasangan terurut yang baru adalah anggota R.*

Contoh 2:
Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b\}$ maka $R = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$ adalah sebuah relasi dari A ke B. relasi inversnya yaitu $R^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 3)\}$

Contoh 3:
Misalkan $P = \{2,3,4\}$ dan $Q = \{2,4,8,9,15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika *"p habis membagi q"*

Maka diperoleh
$R = \{(2,2),(2,4),(4,4),(2,8),(4,8),(3,9),(3,15)\}$
R^{-1} adalah invers dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P dengan $(q,p) \in R^{-1}$ jika q adalah kelipatan dari p maka diperoleh
$R^{-1} = \{(2,2),(4,2),(4,4),(8,2),(8,4),(9,3),(15,3)\}$
Jelas bahwa **jika R sebuah relasi dari A ke B maka R^{-1} adalah sebuah relasi dari B ke A**. Unsur-unsur relasi invers R^{-1} dicari berdasarkan jika $(x,y) \in R$ maka $(y \times x) \in R^{-1}$ dengan titik (y,x) diperoleh dengan cara mencerminkan titik (x,y) terhadap garis y = x.

Contoh 4:
Misalkan $V = \{1,2,3\}$
Dengan $R = \{(1,1),(2,4),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
adalah sebuah relasi dalam V
maka $R^{-1} = \{(1,1),(4,2),(3,3),(1,4),(4,4)\}$

2. Sifat-sifat Relasi

Misalkan R merupakan relasi dari himpunan A, maka akan terdapat sifat-sifat relasi sebagai berikut:

No	SYARAT	FORMAT
1	Sifat Refleksif $\forall a \in A$ berlaku a R a	$a \in A \rightarrow (a,a) \in R$
2	Sifat Irrefleksif $\forall a \in A$ berlaku $\sim(a\ R\ a)$	$a \in A \rightarrow (a,a) \notin R$
3	Sifat Simetri $a,b \in A$ berlaku $(a\ R\ b) \Leftrightarrow (b\ R\ a)$	$((a,b) \in R \wedge (a = b)) \rightarrow (b,a) \in R$ $((a,b) \in R \wedge (a \neq b)) \rightarrow (b,a) \in R$

4	Sifat Antisimetri $a, b \in A$ berlaku $((a\ R\ b) \wedge (a = b)) \rightarrow (b\ R\ a)$ $((a\ R\ b) \wedge (a \neq b)) \rightarrow \sim(b\ R\ a)$	$((a,b) \in R \wedge (a = b)) \rightarrow (b,a) \in R$ $((a,b) \in R \wedge (a \neq b)) \rightarrow (b,a) \notin R$
5	Sifat Asimetri $a, b \in A$ berlaku $(a\ R\ b) \Longrightarrow \sim(b\ R\ a)$	$((a,b) \in R \wedge (a = b)) \rightarrow (b,a) \notin R$ $((a,b) \in R \wedge (a \neq b)) \rightarrow (b,a) \notin R$
6	Sifat Transitif $a, b, c \in A$ berlaku $((a\ R\ b) \wedge (b\ R\ c) \Longrightarrow (a\ R\ c)$	$((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \rightarrow (a,c) \in R$
7	Sifat Ekuivalen Relasi bersifat refleksif, simetri dan transitif	
8	Sifat Partial Order Relasi bersifat Refleksif, Antisimetri dan Transitif	

Contoh soal:

1. Apakah relasi $AB = \{(a,b) | a^2 = b\}$ pada Z memenuhi semua sifat-sifat relasi?

   Jawab:

No	Sifat Relasi	Alasan
1	Tidak Refleksif	$\forall a \in Z$ tidak berlaku $a^2 = a$. Misalnya ambil a = 2 maka ternyata $(2,2) \notin R$
2	Tidak Irrefleksif	$\forall a \in Z$ tidak berlaku $\backsim (a^2 = a)$. Untuk a = 1 terdapat $(1,1) \in R$
3	Tidak Simetri	$a, b \in Z$ seharusnya berlaku $(a^2 = b) \Leftrightarrow (b^2 = a)$. Ternyata terdapat $(2,4) \in R$ tetapi $(4,2) \notin R$
4	Antisimetri	$a, b \in Z$ berlaku $(a^2 = b) \wedge (a = b) \Longrightarrow (b^2 = a)$ dan $(a^2 = b) \wedge (a \neq b) \Longrightarrow \sim(b^2 = a)$. Misalkan untuk a = 1, a = b maka terdapat $(1,1) \in R$, juga terdapat $(2,4) \in R$ ternyata

		$(4,2) \notin R$
5	Tidak Asimetri	$a, b \in Z$ seharusnya berlaku $(a^2 = b) \Longrightarrow \sim(b^2 = a)$. Namun ambil a = 1 dan b = 1 ternyata $(1,1) \in R$
6	Tidak Transitif	$a, b, c \in Z$ seharusnya berlaku $(a^2 = b) \wedge (b^2 = c) \Longrightarrow (a^2 = c)$. Terdapat $(2,4) \in R$ dan $(4,16) \in R$ namun $(2,16) \notin R$
7	Tidak Ekuivalen	Relasi tidak bersifat refleksif, tidak simetri dan tidak transitif
8	Tidak Partial Order	Relasi bersifat tidak refleksif, antimetri dan tidak transitif

Jadi, Relasi $AB = \{(a, b) | a^2 = b\}$ pada Z hanya memenuhi sifat **Antisimetri.**

2. Apakah relasi $\leq$ pada Z dengan $Z \leq Z$ memenuhi semua sifat-sifat relasi?

   Jawab :

No	Sifat Relasi	Alasan
1	Refleksif	$\forall a \in Z$ berlaku $a \leq a$. Misalnya ambil a = 1, 1≤ 1 maka $(1,1) \in R, a = 2, 2 \leq 2$ maka $(2,2) \in R$
2	Tidak Irrefleksif	$\forall a \in Z$ tidak berlaku $\backsim (a \leq a)$. Misal ambil a = 1, $1 \leq 1$ maka $(1,1) \in R, a = 2, 2 \leq 2$ maka $(2,2) \in R$
3	Tidak Simetri	$a, b \in Z$ seharusnya berlaku $(a \leq b) \Leftrightarrow (b \leq a)$. Misal ambil $a = 1$, $b = 2$, maka $(1,2) \in R$ tetapi $(2,1) \notin R$

4	Antisimetri	$a, b \in Z$ berlaku $(a \leq b) \wedge (a = b) \Longrightarrow (b \leq a)$ dan $((a \leq b) \wedge (a \neq b)) \Longrightarrow \sim(b \leq a)$. Misalkan untuk a = 1, b = 1 (a = b) maka $(1,1) \in R$, dan ambil a = 1, b = 2 $(a \neq b)$ maka $(1,2) \in R$ tetapi $(2,1) \notin R$
5	Tidak Asimetri	$a, b \in Z$ seharusnya berlaku $(a \leq b) \Longrightarrow \sim(b \leq a)$. Misal ambil a = 1, b = 2 $(a \neq b)$, ternyata $(2,1) \notin R$ dan ambil a = 1, b = 1 $(a = b)$, ternyata $(1,1) \in R$
6	Transitif	$a, b, c \in Z$ seharusnya berlaku $(a \leq b) \wedge (b \leq c) \Longrightarrow (a \leq c)$. Misal ambil a = 1, b = 2, c = 3 sehingga terdapat $(1,2) \in R$ dan $(2,3) \in R$ maka ternyata $(1,3) \in R$
7	Tidak Ekuivalen	Relasi tidak bersifat simetri tetapi bersifat refleksif dan transitif
8	Partial Order	Relasi bersifat refleksif antisimetri dan transitif

Jadi, Relasi $\leq$ pada Z bersifat **Refleksif, Antisimetri, Transitif, dan Partial Order.**

B. Fungsi

1. Definisi Fungsi

Seperti halnya relasi, dalam mendefinisikan suatu fungsi diperlukan tiga hal pula, yaitu:

1. Suatu himpunan A
2. Suatu himpunan B
3. Suatu kalimat terbuka, yang juga disebut aturan yang mengaitkan tiap elemen $x \in A$ dengan suatu elemen tunggal $x \in B$.

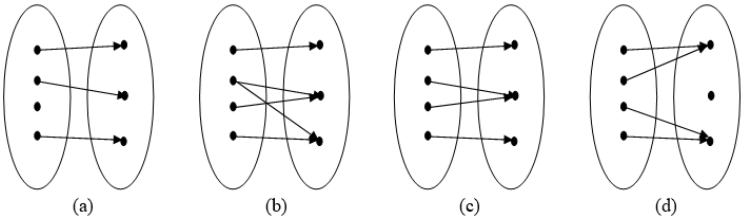
Definisi:

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota dari A dengan tepat satu anggota dari B. Hal ini ditulis:

$$f:A \rightarrow B$$

Contoh 1:

Diagram panah berikut menunjukkan relasi dari himpunan A ke himpunan B. Relasi mana yang merupakan fungsi?



Contoh 2:

Misalkan, $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{a, b, c\}$, suatu fungsi didefinisikan sebagai berikut: $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = c$, dan $f(d) = b$. Maka diagram panah dari $f: A \rightarrow B$ adalah...

Contoh 3:

Jika $f(x) = x^3 - 4$

$f(2) = 2^3 - 4 = 4$

$f(-1) = (-1)^3 - 4 = -5$

$f(a) = a^3 - 4$

$f(a + h) = (a + h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$

Contoh 4:

Untuk $f(x) = x^2 - 2x$ cari dan sederhanakan: a). $f(4)$, b). $f(4+h)$, c). $f(4+h) - f(4)$, d). $[f(4+h) - f(4)]/h$

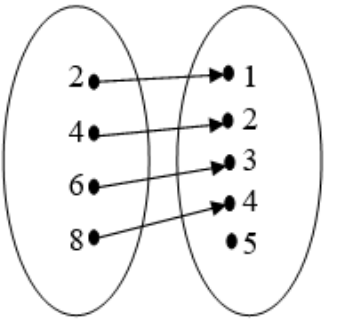
Contoh 5:

Untuk $g(x) = \frac{1}{x}$ cari dan sederhanakan $[g(a+h) - g(a)]/h$

2. Cara Menyajikan Fungsi

Ada beberapa cara dalam menyajikan fungsi, yaitu:

a. Diagram panah



b. Himpunan pasangan terurut

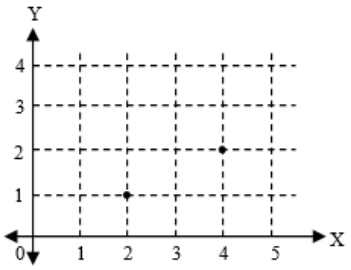
Dari contoh di atas maka: $f = \{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4)\}$

c. Formula

Dari contoh di atas maka: $f(x) = \frac{1}{2}x$

d. Grafik

Dari contoh di atas maka:



Contoh:

Misalkan, $f : A \rightarrow B$

Dengan $A = \{x | 0 \leq x \leq 3, x \in B\}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = 2x + 1$, maka grafik dengan diagram koordinat adalah...

e. Grafik Fungsi

Buatlah sketsa grafik berikut:

a. $f(x) = x^2 - 2$

b. $g(x) = x^3 - 2x$

c. $h(x) = \frac{2}{x-1}$

f. Daerah Asal dan Daerah Hasil

Daerah asal adalah himpunan elemen-elemen dimana fungsi itu mendapatkan nilai.

Daerah hasil adalah himpunan nilai-nilai yang diperoleh dengan aturan tertentu.

Misalnya tentukan daerah asal dan daearah hasil dari fungsi berikut:

$$f(x) = x^2 + 1$$

Contoh:

Cari daerah asal untuk:

a. $f(x) = \frac{1}{x-3}$

b. $g(t) = \sqrt{9 - t^2}$

g. Fungsi Genap dan Ganjil

Fungsi Genap: $f(-x) = f(x)$

Fungsi Ganjil: $f(-x) = -f(x)$

Contoh: apakah fungsi-fungsi berikut fungsi genap atau ganjil?

a. $f(x) = x^2 - 2$

b. $f(x) = 3x^6 - 2x^4 + 11x^2 - 5$

c. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$

d. $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{3x}$

e. $g(x) = x^3 - 2x$

f. $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 4}$

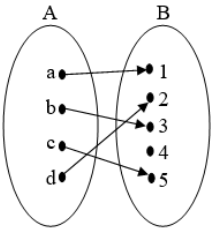
3. Sifat-sifat Fungsi

Ditinjau dari relasinya, fungsi dibedakan menjasi fungsi satu-satu *(injektif),* fungsi pada *(surjektif),* dan fungsi korespondensi satu-satu *(bijektif).*

a. Fungsi satu-satu *(injektif)*

Fungsi $f: A \to B$, dikatakan fungsi **satu-satu** *(injektif)* jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan yang sama di B.

Ilustrasi:



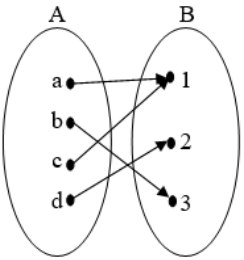
Contoh:

1) Relasi $f = \{(1,w),(2,u),(3,v)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u,v,w,x\}$ merupakan fungsi satu-satu?
2) Relasi $f = \{(1,u),(2,u),(3,v)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u,v,w\}$ merupakan fungsi satu-satu?
3) Misalkan $f : B \to B$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-satu?

b. Fungsi pada *(surjektif)*

Fungsi $f: A \to B$, dikatakan fungsi **pada** *(surjektif)* jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A.

Ilustrasi:

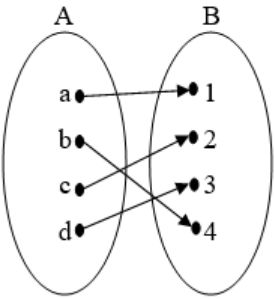


Contoh:

1) Relasi $f = \{(1,u),(2,u),(3,v)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u,v,w\}$ merupakan fungsi pada?

2) Relasi $f = \{(1,w),(2,u),(3,v)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u,v,w\}$ merupakan fungsi pada?
3) Misalkan $f : B \to B$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

c. Korespondensi satu-satu *(bijektif)*
Fungsi $f: A \to B$, dikatakan berkorespondensi satu-satu *(bijektif)* jika merupakan fungsi satu-satu dan juga fungsi pada.
Ilustrasi:



Contoh:
1) Relasi $f = \{(1,u),(2,w),(3,v)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u,v,w\}$ merupakan fungsi yang berkorepondensi satu-satu?
2) Misalkan $f : B \to B$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkorespondensi satu-satu?

d. Fungsi Invertibel (Mempunyai Invers)
$f: A \to B$ adalah Fungsi Invertibel jika f adalah fungsi bijektif.

Contoh :

$f(x) = x + 1, x \in Z$ karena f adalah fungsi bijektif maka f merupakan fungsi invertibel. Dengan invers-nya adalah

$f(x) = x + 1$

$y = x + 1$

$x = y - 1 => f^{-1}(x) = x - 1$

4. Macam-macam Fungsi

Ada beberapa fungsi khusus yang sering digunakan dalam keperluan tertentu pada ilmu matematika. Fungsi-fungsi tersebut antara lain:

a. Fungsi Identitas

$f: A \rightarrow A$, A: sebarang himpunan, maka $f(x) = x$

b. Fungsi Konstan

c. Fungsi *floor* dan fungsi *ceiling*

Fungsi *floor* dari x dilambangkan dengan $\lfloor x \rfloor$ yang menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

Fungsi *ceiling* dari x dilambangkan dengan $\lceil x \rceil$ yang menyatakan nilai bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x

Contoh:

$\lfloor 0{,}5 \rfloor = 0$

$\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$

$\lfloor 4{,}8 \rfloor = 4$

$\lfloor -7{,}5 \rfloor = -8$

$\lceil 0{,}5 \rceil = 1$

$\lceil 3{,}5 \rceil = 4$

$\lceil 4{,}8 \rceil = 5$

$\lceil -7{,}5 \rceil = -7$

5. Aljabar Fungsi

a. Jumlah dan selisih dua fungsi

Apabila f dan g adalah fungsi-fungsi dengan domain Df dan Dg dan peta-peta f(x) dan g(x) ada pada kedua domain tersebut, maka:

a. Jumlah fungsi f dan g, ditulis dengan simbol $f + g$ adalah suatu fungsi:
   $f + g : x \rightarrow f(x) + g(x)$
b. Selisih fungsi f dan g, ditulis dengan simbol $f - g$ adalah suatu fungsi:
   $f - g : x \rightarrow f(x) - g(x)$

Domain dari $f + g$ dan $f - g$ adalah irisan dari Df dan Dg $(Df \cap Dg)$

Contoh:

Diketahui fungsi f dan g pada R, masing-masing dirumuskan sebagai berikut: $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Tentukan $f + g$ dan $-g$!

b. Perkalian dan pembagian dua fungsi

Apabila f dan g adalah fungsi-fungsi dengan domain Df dan Dg dan peta-peta f(x) dan g(x) ada pada kedua domain tersebut, maka:

1) Hasil kali fungsi f dan g, ditulis dengan simbol $f \times g$ adalah suatu fungsi:
   $f \times g : x \rightarrow f(x) \times g(x)$
2) Hasil bagi fungsi f dan g, ditulis dengan simbol $\frac{f}{g}$ adalah suatu fungsi:
   $\frac{f}{g} : x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan $g(x) \neq 0$

Domain dari $f \times g$ dan $\frac{f}{g}$ adalah irisan dari Df dan Dg $(Df \cap Dg)$

Contoh:

Diketahui fungsi f dan g pada R, masing-masing dirumuskan sebagai berikut: $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Tentukan $f \times g$ dan $\frac{f}{g}$!

c. Pangkat suatu fungsi

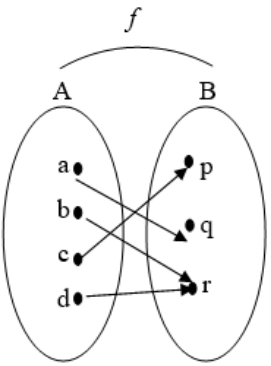
$f^n(x) = \{f(x)\}^n$

Contoh:

Jika $f(x) = -x + 4$. Nilai dari $f(x^2) - (f(x))^2 - 2f(x)$ adalah...

6. Fungsi Invers

Misalkan $f: A \to B$, didefinisikan seperti pada gambar diagram panah berikut:



Maka: $f(a) = q, f(b) = r, f(c) = p, f(d) = r$

$f^{-1}(q) = a, f^{-1}(r) = b, f^{-1}(p) = c, f^{-1}(r) = d$

Rumus umum fungsi invers adalah jika f dan f^{-1} adalah fungsi yang saling invers maka $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Untuk menentukan rumus fungsi invers dari fungsi dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

a. Misalkan $f(x) = y$
b. Nyatakan x dalam y
c. Menentukan rumus dari $f^{-1}(x)$ dengan mengingat $f^{-1}(y) = x$
d. Mengganti variabel y dengan variabel x

Contoh:

a. Tentukan fungsi invers dari $f(x) = \frac{3x+4}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$
b. Jika $f(x) = \frac{1}{x+2}$ dan f^{-1} invers dari f, maka $f^{-1}(x) = -4$ untuk x sama dengan...

Cara menentukan rumus fungsi invers dari beberapa fungsi:

a. Menentukan fungsi invers dari fungsi linear

   Bentuk umum dari fungsi linear adalah $f(x) = ax + b$

   Maka $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

   Contoh:

   Tentukan fungsi invers dari $f(x) = 3x + 4$

b. Menentukan fungsi invers dari fungsi kuadrat

   Bentuk umum dari fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$

   Maka $f^{-1}(x) = \frac{-b \pm \sqrt{4ax + b^2 - 4ac}}{2a}$

   Contoh:

   Tentukan fungsi invers dari $f(x) = x^2 + 2x - 3$

c. Menentukan fungsi invers dari fungsi rasional

Bentuk umum dari fungsi rasional adalah $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, x \neq -\frac{d}{c}$

Maka $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}, x \neq -\frac{a}{c}$

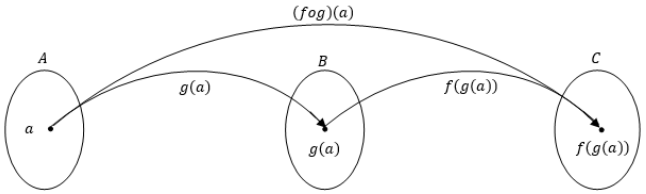
Contoh:

Tentukan fungsi invers dari $f(x) = \frac{3x+4}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$

7. Fungsi Komposisi

Fungsi merupakan bentuk khusus dari relasi, kita juga dapat melakukan komposisi dari dua buah fungsi. Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan f o g, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh: $(fog)(a) = f(g(a))$. Dengan kata lain, $f\ o\ g$ adalah fungsi yang memetakan nilai dari $g(a)$ ke f.

Ilustrasi:



Contoh:

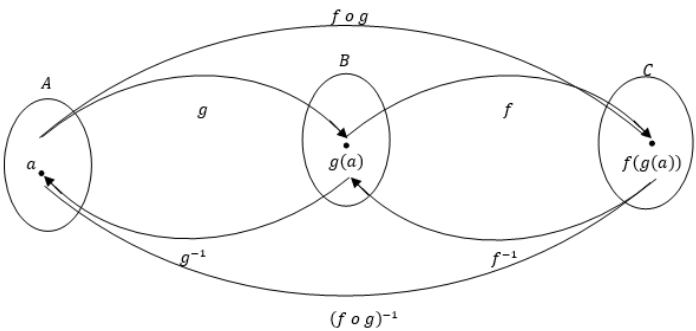
a. Diberikan fungsi $g = \{(1,u),(2,u),(3,v)\}$ yang memetakan $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u,v,w\}$, dan fungsi $f = \{(u,y),(v,x),(w,z)\}$ yang memetakan $B = \{u,v,w\}$ ke $C = \{x,y,z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah $f\ o\ g = \{(1,y),(2,y),(3,x)\}$

b. Diketahui fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan:

1) $(f\ o\ g)(2)$
2) $(g\ o\ f)(2)$
3) $(f\ o\ g)(x)$
4) $(g\ o\ f)(x)$

c. Jika $f(x) = 2x - 3$ dan $(g\ o\ f)(x) = 2x + 1$, maka tentukan $g(x)$!

Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi



Kesimpulan:

- $(f\ o\ g)^{-1} = g^{-1}\ o\ f^{-1}$
- $(g\ o\ f)^{-1} = f^{-1}\ o\ g^{-1}$
- $(f\ o\ g\ o\ h)^{-1} = h^{-1}\ o\ g^{-1}\ o\ f^{-1}$

Contoh:

1. Diketahui $f(x) = x + 4$ dan $g(x) = 2x$, maka $(f\ o\ g)^{-1}(x) = \cdots$
2. Diketahui (f o g)(x) = x + 1 dan f(x-2) = (x - 1)/(x - 2). Maka nilai dari $g^{-1}(2)$ adalah...

Sifat-sifat komposisi fungsi

a. Operasi komposisi pada fungsi-fungsi umumnya tidak komutatif: $(f\ o\ g)(x) \neq (g\ o\ f)(x)$
b. Operasi komposisi pada fungsi-fungsi bersifat assosiatif:
$$f o(g\ o\ h)(x) = \{(f\ o\ g)\ o\ h\}(x)$$
c. Terdapat fungsi identitas $\mathbf{I}\ (x) = x$ sedemikian sehingga:
$$(f\ o\ \mathbf{I})(x) = (\mathbf{I}\ o\ f)(x) = f(x)$$
d. $f\ o\ f^{-1} = f^{-1}\ o\ f = \mathbf{I}$

8. Grafik

a. Grafik fungsi linear

Bentuk umum fungsi linear adalah $y = ax + b$, dengan *a, b* konstanta dan $a \neq 0$. Untuk menggambar grafik fungsi linear dapat dilakukan dengan dua cara yaitu dengan membuat tabel atau menentukan titik-titik potong dengan kedua sumbu koordinat.

Contoh:

Gambarlah grafik $f(x) = 2x + 1$

b. Grafik fungsi kuadrat

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $y = ax^2 + bx + c$, dengan *a, b, c* adalah bilangan riil dan $a \neq 0$. Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola, jika $a > 0$ maka parabola terbuka ke atas sedangkan jika $a < 0$ maka parabola terbuka ke bawah.

Langkah-langkah dalam menggambar grafik fungsi kuadrat:

1) Tentukan titik potong kurva dengan sumbu x, atau $y = 0$ sering disebut juga pembuat nol fungsi $f(x) = 0$, atau $ax^2 + bx + c = 0$
2) Tentukan titik potong kurva dengan sumbu y atau $x = 0$
3) Tentukan sumbu simetri. $x = -\frac{b}{2a}$
4) Tentukan titik puncak kurva, misalnya titik $P(x, y)$ dengan $x = -\frac{b}{2a}$ dan $y = -\frac{b^2-4ac}{4a}$
5) Gambarlah sketsa grafiknya dengan menghubungkan titik-titik tersebut.

Contoh:

Gambarlah grafik fungsi kuadrat

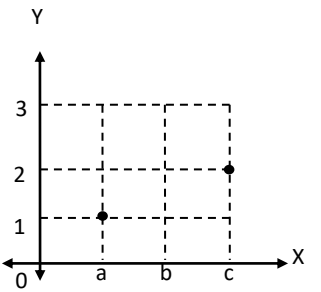
$f(x) = x^2 - 4x + 3$

Latihan Soal

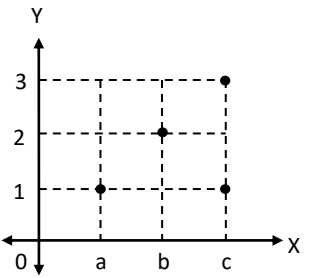
1. Diketahui relasi $R = \{(1,5),(2,10),(3,15),(4,20)\}$. Tentukan:
   a. Daerah asal (domain)
   b. Daerah hasil (range)
   c. Diagram panah dan diagram kartesiusnya
   d. Aturan relasinya
2. Tuliskan pasangan terurut pada relasi R dan $A = \{0,1,2,3,4\}$ ke $B = \{0,1,\ 2,3\}$ yang dalam hal ini pasangan terurut $(a,b) \in R$ jika dan hanya jika $a > b$.
3. Diketahui himpunan $A = \{x|0 < x \leq 10, x \in$ bilangan genap$\}$ dan $B = \{x|0 < x < 6, x \in$ bilangan prima$\}$. R relasi dari himpunan A ke himpunan B dengan aturan "kelipatan dari". Tentukan:
   a. Diagram panah
   b. Himpunan pasangan terurut
   c. Diagram kartesius (grafik)
   d. Apakah merupakan fungsi? Mengapa?
4. Misalkan $A = \{a,b,c\}$ dan $B = \{a,b,c,d\}$. Relasi $R = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ dan relasi $S = \{(a,a),(a,b),(a,c),(\ a,d)\}$ adalah relasi dari A ke B. Tentukan:
   a. $R \cup S$
   b. $R \cap S$
   c. $R - S$
   d. $S - R$
   e. $R \oplus S$
5. Carilah daerah asal (Df) dari :
   a. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

b. $f(x) = \sqrt{8-2x} + \sqrt[4]{9+x}$

6. Diketahui $R = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 4, x, y \in$ bilangan real$\}$ carilah...
   a. Domain
   b. Range
7. Misalkan R adalah relasi dari himpunan $A = \{1,2,3,4\}$ ke himpunan $B = \{1,3,5\}$ yang diakibatkan oleh kalimat terbuka "x kurang dari y".
   a. Tuliskan R sebagai pasangan terurut
   b. Sajikan R ke dalam diagram panah dan diagram cartesius
   c. Tentukan R^{-1} sebagai pasangan terurut
   d. Sajikan R^{-1} ke dalam diagram panah dan diagram cartesius
8. Misalkan himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$, kemudian perhatikan himpunan titik pada diagram koordinat berikut!



(a)



(b)

Apakah kedua grafik di atas merupakan sebuah grafik fungsi?

9. Apakah persamaan-persamaan berikut merupakan fungsi dari $\mathbf{R}$ ke $\mathbf{R}$? Mengapa?
   a. $f(x) = \frac{1}{x}$

b. $f(x) = \sqrt{x}$

10. Tentukan fungsi mana yang merupakan fungsi satu-satu dari **B** ke **B**!
    a. $f(x) = x + 2$
    b. $f(x) = 2x + 1$
    c. $f(x) = x^4 + 1$
    d. $f(x) = x^3$
11. Diketahui $f(x) = 3x + 2$ dan $g(x) = 2(4x - 1)$. Fungsi $f - g, f + g, f \times g$ dan $\frac{f}{g}$ adalah...
12. Jika $f(x) = x - 4$. Nilai dari $f(x^2) - (f(x)^2 + 3f(x)$ untuk $x = -2$ adalah...
13. Fungsi invers dari $f(x) = \frac{2x+1}{3x+4}, x \neq -\frac{4}{3}$ adalah...
14. Jika $g(x) = x + 1$ dan $(f\ o\ g)(x) = x^2 + 3x + 1$, tentukan $f(x)$!
15. Diketahui fungsi $f(x) = 6x - 3$, $g(x) = 5x + 4$ dan $(f\ o\ g)(a) = 81$. Nilai a adalah...
16. Diketahui $f(x) = 3x - 4$ dan $g(x) = 2x + p$. Apabila $f\ o\ g = g\ o\ f$, maka nilai p adalah...
17. Jika diberikan $g = \{(1, b), (2, c), (3, a), (4, b)\}$ adalah fungsi dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{a, b, c, d\}$ dan $f = \{(a, x), (b, x), (c, z), (d, w)\}$ adalah fungsi dari B ke $C = \{w, x, y, z\}$, tuliskan $f\ o\ g$ sebagai himpunan pasangan terurut!
18. Jika $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{5}$ dan $g^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$, maka $(f\ o\ g)^{-1}(6) = \cdots$
19. Misal $f(x) = x + 2$ untuk x > 0 dan $g(x) = \frac{15}{x}$ untuk x > 0. Dengan demikian $f^{-1}o\ g^{-1}(x) = 1$ untuk x sama dengan...
20. Diketahui f(3 + 2x) = 4 - 2x + x^2. maka f(x) = ...?

21. Diketahui $f(x) = x^3 + 4$ dan $g(x) = 2\sin x$. Nilai dari $(f \circ g)(-90)$ adalah...
22. Diketahui $g(x) = (x^2 + 2x - 3)/4$. Maka $g^{-1}(x)$ adalah...
23. Diketahui $g(x) = px + q$ dan $(g \circ g)(x) = 16x - 15$ maka nilai p dan q adalah...

BAB VI
BARISAN DAN DERET

A. Notasi sigma

Notasi sigma akan banyak dijumpai penggunaannya dalam bagian matematika yang lain, nisalnya dalam statistik, banyak menggunakan notasi sigma untuk menghitung rumus rata-rata *(mean)* dan simpangan baku atau ragam, korelasi dan lain-lain.

Perhatikan jumlah lima bilangan genap berikut ini:

$2 + 4 + 6 + 8 + 10$

2 disebut suku pertama

4 disebut suku kedua

6 disebut suku ketiga

8 disebut suku keempat

10 disebut suku kelima

Suku-suku di atas mengikuti pola tertentu, yaitu:

Suku ke-1: $2 = 2.1$

Suku ke-2: $4 = 2.2$

Suku ke-1: $6 = 2.3$

Suku ke-1: $8 = 2.4$

Suku ke-1: $10 = 2.5$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pola dari jumlah 5 bilangan di atas adalah $2k$, dengan $k \in 1,2,3,4,5$.

Untuk menyingkat penjumlahan di atas digunakan huruf capital yunani $\sum$ (dibaca: sigma). Maka penulisan penjumlahan bilangan di atas adalah:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \sum_{k=1}^{5} 2k$$

Secara umum bentuk notasi sigma didefinisikan sebagai berikut:

Definisi:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Contoh:

1. Nyatakan $\sum_{k=1}^{6}(2k^2 + 3)$ dalam bentuk penjumlahan!
2. Nyatakan $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16$ dalam bentuk notasi sigma!

Sifat-sifat:

a. $\sum_{k=1}^{n} 1 = 1$
b. $\sum_{k=a}^{b} cf(k) = c \sum_{k=a}^{b} f(k)$
c. $\sum_{k=a}^{b} f(k) + g(k) = \sum_{k=a}^{b} f(k) + \sum_{k=a}^{b} g(k)$
d. $\sum_{k=1}^{m} f(k) + \sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

B. Barisan Aritmatika

Barisan aritmatika merupakan suatu barisan dengan satu bilangan tertentu yang bisa ditambahkan pada suku ke berapapun untuk mendapatkan suku berikutnya. Dengan demikian jika $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots$ merupakan barisan aritmatika dengan selisih (beda) antar suku sama, yaitu b, maka:

$U_{n+1} = U_n + b$ dengan $b \in R$

Barisan aritmatika juga disebut dengan barisan hitung menggunakan notasi sebagai berikut:

$b =$ beda yang sama: $U_n - U_{n-1}$

$a =$ suku pertama : $U_1 = f(1)$

$n =$ banyaknya suku

$U_n =$ suku ke-$n = f(n)$

dengan notasi tersebut, bentuk barisan aritmatika secara umum sebagai berikut:

Nilai U_n : *a, a+b, a+2b, a+3b,a+4b, …., a+(n-1)b*

Nilai n : 1, 2, 3, 4, 5, …., n

Perhatikan bahwa b memiliki koefisien 1 di suku ke dua. koefisien ini selalu bertambah 1 setiap pindah ke suku berikutnya. Karenanya koefisien dari b di tiap suku 1 angka lebih rendah dari pada suku tersebut.

Misalnya:

suku ke-5 $= a+4b$

suku ke-8 $= a+7b$

suku ke-$n = a+(n-1)b$

hal ini menuntun ke rumus suku ke-n:

$$\boldsymbol{U_n = a + (n-1)b}$$

Contoh:

1. Jika tiga suku pertama dari barisan aritmatika terdiri dari 2, 6, 10, tentukan suku ke-38!
2. Jika suku pertama barisan aritmatika adalah -3 dan suku ke-8 adalah 11, tentukan b dan tentukan 10 suku pertama dari barisan tersebut.

C. Deret Aritmatika

Jika 10 bilangan asli pertama di jumlahakan menjadi seperti berikut:

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$

Jika di urutkan secara terbalik maka diperoleh sebagai berikut:

$S = 100 + 99 + 98 + 97 + \cdots + 1$

Selanjunya dijumlahkan kedua deret tersebut di atas, sehingga diperoleh:

$2S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + (4 + 97) + \cdots + (50 + 51)$

$2S = 101 + 101 + 101 + \cdots + 101$

$2S = (100)(101)$

$S = 5.050$

Cara yang serupa digunakan untuk membuktikan rumus S_n. Dengan cara yang serupa kita dapat menuliskan jumlah n suku pertama dari barisan aritmatika manapun sebagai berikut:

$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \cdots + (a + (n - 1)b)$

Ataupun sebagai berikut:

$S_n = U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + (U_n - 3b) + \cdots + (U_n - (n - 1)b)$

Kemudian suku-suku yang bersesuaian pada kedua persamaan tersebut dijumlahkan, bagian yang melibatkan b dihapuskan dan meninggalkan:

$2S_n = (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \cdots + (a + U_n)$

$2S_n = n(a + U_n)$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)} \text{ atau } \quad \boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)}$$

Contoh:

1. Tentukan jumlah seluruh bilangan ganjil mulai dari 1 sampai dengan 1.111
2. Jika $a = 4, n = 10$, dan $U_{10} = 49$, tentukan b dan S_n
3. Jika $U_n = 23, b = 3$, dan $S_n = 98$, tentukan a dan n
4. Dalam suatu gedung pertunjukkan terdapat 30 kursi pada baris pertama dan setiap baris berikutnya memuat empat kursi lebih banyak dari baris di depannya. Bila dalam gedung itu terdapat sepuluh baris kursi. Tentukanlah:
   a. Banyaknya kursi pada baris ke-10
   b. Banyaknya kursi dalam gedung itu.

D. Sisipan Aritmatika

Rata-rata aritmatika adalah dua bilangan x dan y yang didefinisikan dengan $\frac{x+y}{2}$. Terkadang disebut rata-rata x dan y, meskipun ada rata-rata lain. Perhatikan bahwa:

$$x, \frac{x+y}{2}, y$$

Merupakan barisan aritmatika dengan beda yang sama:

$\frac{x+y}{2} - x = \frac{y-x}{2}$ atau $y - \frac{x+y}{2} = \frac{y-x}{2}$

Jika $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{n-1}, U_n$ berupa barisan aritmatika, maka $U_2, U_3, \ldots, U_{n-1}$ disebut sisipan antara U_1 dan U_n. Nilai b dapat ditentukan sebagai berikut:

$U_n = a + (n-1)b$ nilai beda yang sama untuk barisan aritmatika $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{n-1}$ adalah:

$$b = \frac{U_n - a}{n-1}$$

Contoh:

Sisipkan 4 angka antara 4 dan 10 sehingga terbentuk barisan aritmatika.

E. Barisan Geometri

Barisan yang mempunyai perbandingan yang tetap antara dua suku yang berurutan disebut barisan geometri atau disebut juga barisan ukur. Barisan geometri merupakan barisan yang apabila suatu suku dikalikan dengan angka yang sama maka didapatkan suku berikutnya. Dengan demikian untuk rasio yang sama r, suku-suku dalam barisan $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots$ memenuhi:

$r.U_n = U_{n+1}$, untuk $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Nilai r dapat berupa positif atau negatif. Sehingga rasio didapat sebagi berikut:

$$r = \frac{U_{n+1}}{U_n}$$

Jika dimisalkan:

r = rasio yang sama $= \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n}{U_{n-1}}$

a = suku pertama

n = angka suku

U_n = suku ke-n

Dengan notasi tersebut barisan geometri dapat dituliskan sebagai berikut:

Nilai U_n : $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots, ar^{n-1}$

Nilai n : $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n$

Perhatikan bahwa pangkat dari r pada suku ke dua adalah 1. Pangkat tersebut meningkat satu setiap kita berlanjut ke suku berikutnya. Hal ini membawa kita ke suatu rumusan untuk suku umum:

$$\boldsymbol{U_n = ar^{n-1}}$$

Contoh:

Tentukan suku ke-12 dari barisan geometri yang dimulai dengan dua suku yaitu $\frac{7}{8}$ dan $\frac{7}{4}$

F. Deret Geometri

Definisi S_n :

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$

Merupakan jumlah dari n suku pertama dari barisan geometri. Dalam rangka menurunkan rumus untuk S_n, kalikan kedua ruas dengan r dan diperoleh:

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$

Jika persamaan kedua dikurangkan dari persamaan pertama, maka semua suku di ruas kanan akan terhapus kecuali a dan ar^n. Sehingga diperoleh:

$S_n - rS_n = a - ar^n$

$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$

Dengan menyelesaikan persamaan untuk S_n, didapat jumlah n suku pertama dari suatu barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio yang sama $r \neq 1$ adalah:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Contoh:

1. Tentukan jumlah dari suku-suku 2, -6, 18, -54, 162, -486, dan 1.458
2. Suku pertama dari barisan geometri adalah 3, dan suku keempat adalah -24. Tentukan suku ke-10 dan jumlah 10 suku pertama.
3. Tentukan r dan a jika $S_5 = 61$ dan $U_5 = 81$

G. Sisipan Geometri

Jika a dan b bilangan positif, maka $a, \sqrt{ab}, b$ merupakan barisan geometri dari tiga suku, dan $\sqrt{ab}$ disebut sisipan geometri dari a dan b.

Jika $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ merupakan barisan geometri, bilangan berikut: $U_2, U_3, \dots, U_{n-1}$ disebut sisipan geometri dari U_1 dan U_n.

Contoh:

Tentukan lima sisipan geometri antara 3 dan 192

H. Deret Geometri Tak Hingga

Barisan geometri tak hingga dengan suku pertama a dan rasio r adalah:

$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots, ar^{n-2}, ar^{n-1}, \dots$

sedangan deret geometri tak hingga mengindikasikan penjumlahan:

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$

Kita tidak menjumlahkan suku tak hingga secara harfiah, tetapi pastinya kita dapat menjumlahkan suku yang hingga. Seperti yang sebelumnya kita lihat, jumlah n suku pertama dinotasikan dengan S_n, dan penjumlahan itu adalah:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Sehingga untuk mencari deret geometri tak hingga adalah:

$\boldsymbol{S_\infty = \frac{a}{1-r}}$ dengan $\boldsymbol{-1} < r < 1$

Contoh:

1. Tentukan jumlah dari deret geometri tak hingga berikut ini:
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots$$
2. Tentukan rasio r dari deret geometri tak hingga jika jumlahnya $S = 2$ dan $a = \frac{1}{2}$.
3. Tuti berkurang berat badannya 18 pon dalam 6 bulan, 12 pon dalam 6 bulan berikutnya, 8 pon untuk 6 bulan berikutnya dan seterusnya sampai waktu yang lama. Berapa jumlah maksimal berat yang berkurang?
4. Tentukan jumlah deret geometri berikut!
$$2x+3+\frac{(2x+3)^2}{4}+\frac{(2x+3)^3}{16}+\cdots$$

Latihan Soal

1. Nyatakan $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{6}{11}$ dalam bentuk notasi sigma!
2. Nilai $\sum_{n=1}^{25}(9n-8)$ adalah...
3. Nilai $\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ adalah...
4. Jika $\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i^2+2}{x}=105$ maka x =...
5. Tuliskan n suku barisan aritmatika jika diketahui :

a. $U_1=3, b=4, n=5$
b. $U_1=17, b=-2, n=6$
c. $U_1=0, b=-4, n=6$

6. Suku ke-4 dan suku ke-7 suatu barisan aritmatika berturut-turut adalah 17 dan 29. Suku ke-25 barisan tersebut adalah...
7. Andi mendapat nilai 64 pada tes pertama dan mendapat 6 poin lebih tinggi pada tiap tes berikutnya. Berapakah nilainya pada tes ke-5? Dan berapakah nilai rata-rata dari lima tes tersebut?
8. Tentukan tiga angka yang disisipkan antara 3 dan 15 sehingga menjadi barisan aritmatika.
9. Sisipkan 4 angka antara 10 dan -10 sehingga menjadi barisan aritmatika.
10. Tuliskan n suku barisan geometri jika diketahui:

a. $U_1=3, r=2, n=5$
b. $U_1=243, U_4=9, n=5$
c. $U_6=\frac{3}{16}, U_2=3, n=6$

11. Tentukan nilai n jika diketahui $U_n=81, a=1, r=3$!

12. Tentukan nilai a jika diketahui $S_n = -819, n = 6, r = -4$!
13. Tentukan nilai r jika diketahui $S_n = 43, a_n = 1, a = 64$!
14. Tentukan nilai r dan S_n jika diketahui $a_n = 1, n = 9, a = 256$!
15. Sejumlah bakteri di suatu kultur berkembang biak setiap 2 jam. Jika terdapat n bakteri pada pukul 12 siang hari ini, berapakah jumlah mereka pada pukul 12 siang esok hari?
16. Tarikan pompa pertama menghisap satu per empat udara dari suatu tabung, dan tarikan berikutnya menghisap udara seperempat dari yang tersisa. Berapakah jumlah udara yang tersisa setelah enam tarikan?
17. Tentukan 2 angka yang disisipkan antara 2 dan 54 sehingga menjadi barisan geometri.
18. Tentukan empat angka yang disisipkan antara $\frac{2}{9}$ dan $\frac{27}{16}$ sehingga menjadi barisan geometri!
19. Tiga angka membentuk barisan geometri. Jika 8 ditambahkan pada angka ke-2 maka angka-angka tersebut membentuk barisan aritmatika. Jika 64 ditambahkan pada angka ke tiga, maka barisan aritmatika tadi menjadi barisan geometri lagi. Tentukan tiga angka semula!
20. Tuliskan n suku deret geometri tak hingga jika diketahui :
    a. $U_1 = 3, r = \frac{4}{5}$
    b. $U_1 = 12, r = 8,$
    c. $U_1 = 11, r = -\frac{1}{10}$

21. Tentukan nilai a jika diketahui $r = \frac{1}{3}, S = 1$
22. Tentukan nilai r jika diketahui $a = 16, S = 10$
23. Jika sebuah bola melambung tiga per lima dari jatuhnya, berapa jarak yang ditempuh bola tersebut sebelum berhenti dijatuhkan dari ketinggian 30 m?
24. Mulai tahun 2000, pak arman mempunyai kebun tebu. Penghasilan kebun tebu pa arman pada akhir tahun 2000 adalah Rp. 6.000.000,-. Mulai tahun 2001, pak arman memupuk kebun tebunya dengan pupuk kandang. Pak arman memperkirakan bahwa setiap akhir tahun, penghasilan kebun tebunya naik Rp. 500.000,-. Berapa perkiraan penghasilan kebun tebu Pak arman pada akhir tahun 2005?

Referensi

1. Drs. Yaya S Kusumah, *Logika Matematika Elementer*, Tarsito Bandung, 1986.
2. Tita Khalis Maryati,S.Si.,M.Kom., *Diktat Mata Kuliah Matematika Dasar*, FITK UIN Syarif Hidayatullah, Jakarta.
3. Afidah & Khairunnisa, *Matematika Dasar*, Jakarta: PT.Raja Grafindo Persada, 2014.
4. I Made Tirta, *Bahan Ajar Pengantar logika matematika*. Jember: UNEJ, 2011.
5. Nego Linuhung & Ira Vahlia. Logika, Himpunan dan Relasi dan Fungsi. Penerbit: Pendidikan Matematika UM Metro. Edisi 2. 2017.
6. Setiadji, *Logika Informatika,*Graha Ilmu, Yogyakarta, 2007.
7. Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and its Application*, 4^{th} ed., McGraw-Hill, 1999.
8. Seymor Lipschutz, Ph.D.-Pantur Silaban,Ph.D., *Teori Himpunan*, Penerbit Erlangga,1995.
9. Earl W. Swokowski, *Fundamentals of College Algebra*, Prindle Weber & Schmidt Boston, Massachussetts, 1981.
10. Lipschutz S. *Teori Himpunan*, Erlangga, Jakarta, 1995.

Tentang Penulis

Ramdani Miftah, M.Pd. merupakan dosen program studi Pendidikan Matema-tika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan (FITK) UIN Syarif Hidayatullah Jakarta. Menempuh Pendidikan S1 di UIN Syarif Hidayatullah Jakarta kemudian melanjut-kan program S2 di UPI Bandung pada jurusan Pendidikan Matematika. Penulis aktif dalam berbagai kegiatan seminar nasional atau internasional diantaranya pemakalah dalam seminar nasional Pemuda dan Bela Negara Dengan judul makalah => ISLAM, PANCASILA DAN MATEMATIKA (Integrasi dalam Mengembangkan Kemampuan Literasi Matematis). Diselenggarakan oleh UIN Sunan Kalijaga Yogjakarta Tahun 2018, *International Conference on Edu-cation in Muslim Society (ICEMS)* FITK UIN Syarif Hida-yatullah Jakarta 2020, Konferensi International AUN-QA di Mahidol University, Thailand tahun 2019.

Pemakalah dalam seminar nasional Pemuda dan Bela Negara di UIN Sunan Kalijaga Yogjakarta Tahun 2018, pemakalah dalam International Conference of Inovation, Science, Technology, Education, Children, and Health (ICISTECH) tahun 2021, pemakalah dalam International Conference of Social Research with

Multidisciplinary Approach (ICSRMA) tahun 2021. Selain itu, juga menulis beberapa buku di antaranya Mind Control: mengubah per-sepsi negatif terhadap matematika tahun 2017 dan *Life and Career Skills:* Perspektif Guru dan Siswa dalam Pembelajaran Matematika tahun 2021. Penulis juga aktif melakukan publikasi karya ilmiah di antaranya yang diterbitkan di At-lantis Press terindeks Thomson Reuter dan AMSJ terindeks scopus.